

# ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

MITWIRKUNG VON L. COLLATZ · H. GÖRTLER · J. HEINHOLD · K. KLOTTER  
MARGUERRE · H. NEUBER · L. SCHMETTERER · K. SCHRÖDER · H. SCHUBERT  
VOLLMIEN · H. UNGER UND C. WEBER · HERAUSGEGEBEN VON H. HEINRICH, DRESDEN

Bd. 40

SEITE 433—528

HEFT 10/11

OKTOBER/NOVEMBER 1960

## AUS DEM INHALT:

### H A U P T A U F S Ä T Z E

**F. Reutter:** Geometrische Untersuchungen über Nomogramme für elliptische Integrale erster Gattung und Jacobische elliptische Funktionen I. / **E. Fehlberg:** Neue genauere Runge-Kutta-Formeln für Differentialgleichungen  $n$ -ter Ordnung / **P. Sagirow:** Zur Frage der Fehlerabschätzung beim Verfahren der harmonischen Balance / **K. Hasselmann:** Die Totalreflexion einer kugelförmigen Kompressionsfront an der Trennungsebene zweier elastischer Medien / **J. Brilla:** Einige gemischte Randbedingungen anisotroper Platten / **B. D. Aggarwala:** Thermal Stresses in Spherical Shells of Viscoelastic Materials / **J. Matyáš:** Successive Approximations Process in Analog Solution of Partial Differential Equations by Difference Method / **W. A. Bassali:** Some Problems in the Small Deflexions of Clamped Thin Isotropic Plates

### K L E I N E M I T T E I L U N G E N

### B U C H B E S P R E C H U N G E N

### E I N G E G A N G E N E B Ü C H E R

AKADEMIE-VERLAG GMBH · BERLIN



## INHALT:

Seite

<b>Hauptaufsätze. F. Reutter:</b> Geometrische Untersuchungen über Nomogramme für elliptische Integrale erster Gattung und Jacobische elliptische Funktionen I. . . . .	433
<b>E. Fehlberg:</b> Neue genauere Runge-Kutta-Formeln für Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung . . . . .	449
<b>P. Sagirow:</b> Zur Frage der Fehlerabschätzung beim Verfahren der harmonischen Balance . . . . .	456
<b>K. Hasselmann:</b> Die Totalreflexion einer kugelförmigen Kompressionsfront an der Trennungsebene zweier elastischer Medien . . . . .	464
<b>J. Brilla:</b> Einige gemischte Randbedingungen anisotroper Platten . . . . .	472
<b>B. D. Aggarwala:</b> Thermal Stresses in Spherical Shells of Viscoelastic Materials . . . . .	482
<b>J. Matyáš:</b> Successive Approximations Process in Analog Solution of Partial Differential Equations by Difference Method . . . . .	488
<b>W. A. Bassali:</b> Some Problems in the Small Deflexions of Clamped Thin Isotropic Plates . . . . .	493
<b>Kleine Mitteilungen. H. Lipps:</b> Zur Berechnung rotationssymmetrischer Düsenströmungen . . . . .	507
<b>K. Nickel:</b> Eine Vereinfachung des v. Kármán-Pohlhausen-Verfahrens für Grenzschichten an Rotationskörpern . . . . .	510
<b>S. Bhowmick:</b> Effect of an Isolated Force Acting at a Point near a Rigid Circular Inclusion in a Plate . . . . .	511
<b>J. Ramakanth:</b> Dislocation of the First Order . . . . .	512
<b>J. Albrecht:</b> Formeln zur numerischen Integration über Kreisbereiche . . . . .	514
<b>Buchbesprechungen</b> . . . . .	517
<b>Eingegangene Bücher</b> . . . . .	528
<b>Berichtigung</b> . . . . .	528

Wir bitten, alle Manuskriptsendungen direkt an den Herausgeber, Prof. Dr.-Ing. H. Heinrich, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31, zu richten. Zu den Arbeiten, die als Hauptaufsätze bestimmt sind, erbitten wir auf gesondertem Blatt eine kurze Zusammenfassung des Inhalts, nach Möglichkeit in deutscher, englischer und russischer Sprache; falls die Übersetzungen nicht geliefert werden können, ist wenigstens die Angabe spezieller Fachausdrücke in den verschiedenen Sprachen erwünscht. Die Arbeiten sollen in klarer Schrift, möglichst mit Schreibmaschine, zeitlich und einseitig geschrieben sein und die nötigen Hinweise für den Setzer betreffend Schrifttypen (z. B. griechisch, Fraktur), Sperrungen o. a. enthalten. Zur Beschleunigung des Drucks und zur Vermeidung von Satzfehlern empfiehlt es sich, umfangreiche und unübersichtliche Formelausdrücke durch Einführung von Abkürzungen zu vermeiden. Bilder sollen als Tuschzeichnungen auf Transparentpapier (Beschriftung mit Bleistift) oder als saubere Bleistiftskizzen ausgeführt sein. Bildunterschriften sind am Schluß des Textes anzufügen. Sollte die Arbeit bereits an anderer Stelle verbreitet sein (als Dissertation, Forschungsbericht, Manuskriptdruck o. ä.), so ist dies auf der ersten Textseite in einer Fußnote anzugeben. Für die Zusammenstellung der zitierten Literatur, am Schluß der Arbeit, bitten wir, sich einer einheitlichen Notation entsprechend folgendem Muster zu bedienen, z. B. W. Schmeidler, Über die Wärmespannungen in einem Körper, ZAMM 28 (1948), S. 54—59 oder G. Bürgermeister und H. Steup, Stabilitätstheorie I, 1. Aufl., Berlin 1957, Akademie-Verlag, S. 142—147. Die Autoren erhalten von den Hauptaufätzen 75, von den Kleinen Mitteilungen 25 Sonderdrucke ohne Berechnung, darüber hinaus bis zu 250 Sonderdrucke gegen Berechnung.

Der Verlag behält sich für alle Beiträge das Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung vor.

## Neuerscheinung

# Technische Mechanik

Von Prof. Dr.-Ing. habil. DIETER RÜDIGER  
und Prof. Dr.-Ing. habil. ALFRED KNESCHKE

## Band I. Statik starrer Körper

322 Seiten mit 421 Bildern. Gr. 8°.

In Ganzleinen mit farbigem Schutzumschlag etwa 25,— DM (Best.-Nr. 9466) Erscheint Ende 1960.

Ein Teil der Auflage dieses I. Bandes kann auch kartoniert in 3 Einzelleistungen zum Preise von etwa je 8,— DM bezogen werden.

## Band II. Festigkeitslehre

erscheint 1961

## Band III. Dynamik

in Vorbereitung

Das vorliegende Werk stellt die Lehrgebiete der technischen Mechanik in einem Umfang dar, der den Grundvorlesungen an den Technischen Hochschulen entspricht. Die einzelnen Sachgebiete sind dabei so herausgestellt, daß den Studierenden der verschiedenen Disziplinen der Weg in die speziellen Vorlesungen über Statik, Kinematik und Kinetik starrer Körper und deformierbarer Medien geebnet wird. Ebenso bemühten sich die Autoren, dem Leser ein tieferes Verständnis für die Zusammenhänge der Mechanik zu vermitteln.



B. G. TEUBNER Verlagsgesellschaft • Leipzig



### Geometrische Untersuchungen über Nomogramme für elliptische Integrale erster Gattung und Jacobische elliptische Funktionen I.

Von F. REUTTER

*Die vor kurzem in dieser Zeitschrift entwickelte Theorie der nomographischen Darstellbarkeit von Funktionensystemen [1]<sup>1)</sup> wird auf Funktionen eines komplexen Arguments angewandt. Insbesondere werden Nomogramme zur Ermittlung der Funktionswerte elliptischer Funktionen und Integrale entwickelt. Ihre geometrische Struktur und ihre zweckmäßige Formgebung werden eingehend untersucht.*

*The theory of nomographic representation of function systems, recently developed in this periodical [1]<sup>1)</sup>, is applied to functions of complex argument. In particular, nomograms are given for the evaluation of elliptic functions and integrals. Their geometrical structure and most suitable form are studied in detail.*

Развитая недавно в настоящем журнале теория представления систем функций при помощи номограмм [1]<sup>1)</sup> применяется к функциям комплексного аргумента. В частности устанавливаются номограммы для отыскания значений эллиптических функций и эллиптических интегралов. Подробно рассматриваются их геометрическое строение и вопрос наиболее целесообразного их вида.

#### Einleitung

Bei vielen technischen Problemen treten elliptische Funktionen auf. So spielen sie z. B. eine wesentliche Rolle bei der Berechnung elektrischer Filter sowie bei einer Reihe von zweidimensionalen Problemen der Elastizitätstheorie und der Elektrotechnik, die mit Hilfe der konformen Abbildung eines polygonalen Bereichs auf die Halbebene oder den Einheitskreis behandelt werden können. Nun liegen zwar Tafeln der JACOBISCHEN elliptischen Funktionen eines reellen Arguments für den Modulbereich  $0 < k^2 < 1$  <sup>2), 3), 4)</sup> sowie der elliptischen Normalintegrale 1. und 2. Gattung <sup>5)</sup> vor. Die Ermittlung der benötigten zahlreichen Funktionswerte von JACOBISCHEN elliptischen Funktionen eines komplexen Arguments erfordert aber auch bei Verwendung dieser Tafeln einen sehr erheblichen numerischen Rechenaufwand. Indessen sind die Genauigkeitsansprüche an die Rechnung oft gar nicht so sehr groß. Daher liegt der Gedanke nahe, die Funktionswerte mit Hilfe von Nomogrammen zu bestimmen. Da der (einmalige) Aufwand zur Berechnung der Nomogramme beim Einsatz elektronischer Rechenautomaten keine Rolle mehr spielt, können von ein und derselben Funktion zahlreiche durch projektive Transformationen ineinander überführbare Nomogramme hergestellt werden, von denen jedes in einem anderen Bereich der Veränderlichen besonders genaue Ablesungen erlaubt. Hierdurch wie auch durch den Einsatz moderner Mittel der Zeichen- und der Reproduktionstechnik läßt sich eine erhebliche Genauigkeitssteigerung für das Arbeiten mit Nomogrammen erreichen.

Nomogramme für einzelne komplexe Funktionen, im wesentlichen für elementare Transzendenten, sind schon vor längerer Zeit entwickelt worden [2], [3], [4]. Vor kurzem wurde hier eine systematische Theorie der nomographischen Darstellbarkeit von Funktionen eines komplexen Arguments veröffentlicht [1]. Hierauf aufbauend soll im folgenden die Entwicklung von solchen Nomogrammen behandelt werden, die geeignet sind, die Funktionswerte der JACOBISCHEN elliptischen Funktionen eines komplexen Arguments zu bestimmen. Die geometrischen Eigenschaften dieser Nomogramme werden eingehend untersucht. Dabei ergeben sich im ersten Teil dieser Arbeit u. a. manche Resultate, die sich auch in [5] finden.

<sup>1)</sup> Die in [ ] gesetzten Zahlen beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

<sup>2)</sup> L. M. MILNE-THOMSON, Jacobian Elliptic Function Tables (fünfstellig), New York 1950.

<sup>3)</sup> SPENCELEY, Smithsonian elliptic function tables (zwölfstellig), Washington 1947.

<sup>4)</sup> M. SCHULER, H. GEBELEIN, Tabellen zu den elliptischen Funktionen, dargestellt mittels des Jacobischen Parameters, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955, kleine Ausgabe (fünfstellig), große Ausgabe (achtstellig).

<sup>5)</sup> A. M. LEGENDRE, Tafeln der ellipt. Normalintegrale, herausgegeben von FRITZ EMDE, Stuttgart 1931.



# 1. Allgemeines über nomographisch darstellbare elliptische Funktionen einer komplexen Veränderlichen

Gegeben sei eine analytische Funktion  $w = w(z)$  mit  $z = x + i y$ ,  $w = u(x, y) + i v(x, y)$ . Ihre Umkehrfunktion sei  $z = z(w) = x(u, v) + i y(u, v)$ . Alle und nur solche Funktionen  $w = w(z)$  bzw.  $z = z(w)$ , die durch ein Fluchtliniennomogramm darstellbar sind, genügen nach [1] einer Differentialgleichung

$$w''^2 = a_1 + a_2 w'^2 + a_3 w'^4 + a_4 w'^6 \quad \dots \quad (1,1)$$

bzw.

$$z''^2 = a_1 z'^6 + a_2 z'^4 + a_3 z'^2 + a_4 \quad \dots \quad (1,2)$$

mit konstanten reellen Koeffizienten  $a_i$ . Die Skalen für  $u$  und  $v$  einerseits und die für  $x$  und  $y$  andererseits haben je eine Kurve zweiter Ordnung zum gemeinsamen Skalenträger. Ist  $a_4 = 0$ , so zerfällt der erste Kegelschnitt in zwei Gerade, ist  $a_1 = 0$ , so zerfällt der zweite Kegelschnitt in zwei Gerade. Je vier durch die Beziehungen

$$w = u + i v, \quad u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

verknüpfte Werte  $x, y, u, v$  liegen auf einer Ablesegeraden.

Man erhält die Gesamtheit aller durch ein solches Fluchtliniennomogramm darstellbaren Funktionen, indem man (1,1) oder (1,2) für alle Kombinationen von Werten der Konstanten  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) integriert. Zu vorgegebenen Werten  $a_i$  gehört genau eine Differentialgleichung aus der Differentialgleichungsmannigfaltigkeit (1,1) bzw. (1,2). Gibt man noch Anfangsbedingungen  $w(z_0) = w_0$ ,  $w'(z_0) = w'_0$  vor, so ist eine Lösung dieser Differentialgleichung mit festen Werten der Integrationskonstanten  $C_1, C_2$  bestimmt. Die vollständige Integration von (1,1) bzw. (1,2) wurde in [1] durchgeführt. Zu den Funktionen, die sich mit  $a_4 = 0$  ergeben, gehören insbesondere

$$w - C_1 = \tilde{\alpha} \operatorname{am} [\tilde{\beta} (z - C_2), k^2] \quad \dots \quad (1,3),$$

$$w - C_{1s} = \alpha_s \ln \operatorname{sn} [\beta_s (z - C_{2s}), k_s^2] \quad \dots \quad (1,4a),$$

$$w - C_{1c} = \alpha_c \ln \operatorname{cn} [\beta_c (z - C_{2c}), k_c^2] \quad \dots \quad (1,4b),$$

$$w - C_{1d} = \alpha_d \ln \operatorname{dn} [\beta_d (z - C_{2d}), k_d^2] \quad \dots \quad (1,4c).$$

Die Nomogramme dieser Funktionen sollen in der vorliegenden Arbeit eingehend untersucht werden. Die Bereiche der Moduln  $k^2$  bzw.  $k_s^2, k_c^2, k_d^2$  hängen von dem Vorzeichen der Diskriminante  $\Delta_1 = a_2^2 - 4 a_1 a_3$  ab. Die Fälle  $\Delta_1 > 0$  bzw.  $\Delta_1 < 0$  führen auf zwei grundsätzlich verschiedene Nomogrammtypen: Im Falle  $\Delta_1 > 0$  sind  $\beta^2$  und  $k^2$  (1,3) reell. Alle Skalenträger für  $x$  und  $y$ , die zu verschiedenen  $k^2$ -Werten gehören, bilden einen Kegelschnittbüschel mit vier reellen Grundpunkten. Ist  $\Delta_1 < 0$ , so sind  $\beta^2$  sowie  $k^2$  komplex, wobei dieses komplexe  $k^2$  einer der drei Gleichungen

$$k^2 + \bar{k}^2 = k^2 \bar{k}^2, \quad k^2 + \bar{k}^2 = 1, \quad \frac{1}{k^2} + \frac{1}{\bar{k}^2} = \frac{1}{k^2 \bar{k}^2} \quad \dots \quad (1,5a, b, c)$$

genügt. Die Skalenträger für  $x$  und  $y$  bilden jetzt einen Kegelschnittbüschel mit zwei reellen und zwei konjugiert komplexen Grundpunkten.

Jede der Funktionen (1,3), (1,4a, b, c) kann mit geeigneten  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, k^2$  als Lösung ein und derselben Differentialgleichung ( $a_1, a_2, a_3$  fest vorgegeben,  $a_4 = 0$ ) aus (1,1) bzw. (1,2) geschrieben werden. Daher müssen durch eine geeignete Zuordnung der Werte  $C_1, C_2$  zu  $C_{1f}, C_{2f}$ <sup>6)</sup> sowie  $k^2, \tilde{\alpha}^2, \tilde{\beta}^2$  zu  $k_f^2, \alpha_f^2, \beta_f^2$ <sup>6)</sup> die Funktionen (1,3) und (1,4a, b, c) ineinander überführbar sein.

Geht man von einer der Funktionen (1,4a, b, c) mit festen  $\alpha_f, \beta_f, k_f^2$  aus, so sind  $a_1, a_2, a_3$  und damit  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, k^2$  festgelegt (vgl. [1] Tabelle 1). Für die zu den  $a_1, a_2, a_3$  gehörenden Werte  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, k^2$  (1,3) erhält man

$$k^2 = \frac{2\sqrt{\Delta_1}}{\sqrt{\Delta_1} + a_2}, \quad \tilde{\alpha}^2 = \frac{-1}{a_3}, \quad \tilde{\beta}^2 = \frac{a_2 + \sqrt{\Delta_1}}{2} = \frac{a_2}{2 - k^2} \quad \dots \quad (1,6).$$

Sind noch  $C_{1f}, C_{2f}$  gegeben, so sind auch  $C_1, C_2$  bestimmt und lassen sich wie folgt ermitteln: Damit die Funktionen (1,3) und (1,4) identisch sind, müssen sie auch in den Anfangswerten übereinstimmen. Nun ist (1,3) äquivalent mit

$$z - C_2 = \frac{1}{\tilde{\beta}} \int_0^{\frac{1}{\tilde{\alpha}}(w - C_1)} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}},$$

<sup>6)</sup> Der Index  $f$  bedeutet  $s$  bei (1,4a) oder  $c$  bei (1,4b) oder  $d$  bei (1,4c).



und es ist

$$w(C_2) = C_1 \dots \dots (1,7a), \quad w'(C_2) = \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \dots \dots (1,7b).$$

Die Übereinstimmung in den Anfangswerten wird zweckmäßig an der Stelle  $z_f = C_2$  verlangt, so daß nach (1,7a)

$$w_f(C_2) - C_{1f} = \alpha_f f(\beta_f(C_2 - C_{2f}), k_f^2) = w(C_2) - C_{1f} = C_1 - C_{1f} \dots \dots (1,8a)^7).$$

Entsprechend erhält man

$$w'_f(C_2) = w'(C_2) = \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \dots \dots (1,8b).$$

Man bestimmt zunächst aus (1,8b)  $C_2$  und dann aus (1,8a)  $C_1$ .

Als Beispiel soll die Funktion

$$w = \ln \operatorname{cn}(z, k_c^2) \quad (\alpha_c = \beta_c = 1, \quad C_{1c} = C_{2c} = 0) \dots \dots (1,9)$$

behandelt werden. Anstatt  $a_1, a_2, a_3$  nach [1] aus  $\alpha_f, \beta_f, k_f^2$  zu gewinnen, kann man auch mit (1,9) in (1,1) eingehen und  $a_1, a_2, a_3$  bestimmen. Man erhält

$$w''^2 = 1 - 2(k_c^2 - k_c'^2)w'^2 + w'^4,$$

also

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -2(k_c^2 - k_c'^2), \quad a_3 = 1, \quad \Delta_1 = -16 k_c^2 k_c'^2.$$

Hieraus folgt für die mit (1,9) äquivalente Funktion (1,3) nach (1,6):

$$\tilde{\alpha}^2 = -1, \quad \tilde{\beta}^2 = (k_c' + i \varepsilon k_c)^2, \quad k_{am}^2 = \frac{4 \varepsilon i k_c k_c'}{(k_c' + \varepsilon i k_c)^2} \quad \text{mit} \quad \varepsilon^2 = 1 \quad (1,10).$$

Aus Gl. (1,8b) zur Bestimmung von  $C_2$  wird

$$\frac{-\operatorname{sn}(C_2, k_c^2) \operatorname{dn}(C_2, k_c^2)}{\operatorname{cn}(C_2, k_c^2)} = \tilde{\alpha} \tilde{\beta}.$$

Dies führt auf folgende Gleichung für  $\operatorname{cn}^2(C_2, k_c^2) = c^{*2}$ :

$$c^{*4} - 2 \frac{i \varepsilon k_c'}{k_c^2} c^{*2} - \frac{k_c'^2}{k_c^2} = 0 \quad \text{mit} \quad c^{*2} = \frac{i \varepsilon k_c'}{k_c} \dots \dots (1,11).$$

Nun sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a)  $0 < k_c^2 < 1$ . Dann findet man aus (1,11) unmittelbar

$$C_2 = \frac{1}{2} (K(k_c^2) + i \varepsilon K'(k_c^2))$$

und daher

$$C_1 = \ln(\operatorname{cn} C_2) = \frac{1}{2} \ln \left( i \varepsilon \frac{k_c'}{k_c} \right).$$

b)  $k_c^2 < 0$ . Nach Umformung von (1,11) mit Hilfe der Modultransformation  $k^{*2} = -\frac{k_c^2}{k_c'^2}$  findet man

$$C_2 = + \frac{i}{2} k^{*'} K'(k^{*2}) \quad \text{für} \quad \varepsilon = -1, \quad C_2 = + k^{*'} \left( K(k^{*2}) + \frac{i}{2} K'(k^{*2}) \right) \quad \text{für} \quad \varepsilon = +1,$$

$$C_1 = - \frac{1}{2} \ln k^* \quad \text{für} \quad \varepsilon = -1, \quad C_1 = \frac{i}{2} - \frac{1}{2} \ln k^* \quad \text{für} \quad \varepsilon = +1.$$

c)  $k_c^2 > 1$ . Nach Umformung von (1,11) mit Hilfe der Modultransformation  $k^{*2} = \frac{1}{k_c^2}$  findet man

$$C_2 = \frac{k^*}{2} K(k^{*2}) \quad \text{für} \quad \varepsilon = -1, \quad C_2 = \frac{k^*}{2} (K(k^{*2}) - 2 i K'(k^{*2})) \quad \text{für} \quad \varepsilon = +1,$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \ln k^{*'} \quad \text{für} \quad \varepsilon = -1, \quad C_1 = \frac{i}{2} + \frac{1}{2} \ln k^{*'} \quad \text{für} \quad \varepsilon = +1.$$

In 2. sind die Skalengleichungen für  $w_1 = \operatorname{am}(z_1, k^2)$ ,  $k^2$  reell ( $\Delta_1 > 0$ ) und  $w_1 = \operatorname{am}(\beta z_1, k^2)$ ,  $k^2$  komplex,  $\beta^2 = \frac{2i}{k^2}$  ( $\Delta_1 < 0$ ) angegeben. Diese Funktionen sind wegen der oben geforderten

<sup>7)</sup>  $f(t)$  bedeutet  $\ln \operatorname{sn} t$  oder  $\ln \operatorname{cn} t$  oder  $\ln \operatorname{dn} t$ .



Tabelle I

Nr.	Funktion	$\Delta_1$	$k^2$ Bereich	$k_{am}^2$	Modul für die Argument-Transformation	Bereich des Moduls $k^2$ bzw. $k_{am}^2$	Transformation des Arguments $\varepsilon = -1$	der abhängigen Veränderlichen	Bereich des Moduls $k^2$ bzw. $k_{am}^2$	Transformation des Arguments $\varepsilon = +1$	der abhängigen Veränderlichen
1a	$w = \ln \operatorname{sn}(z, k_S^2)$	$> 0$	$0 < k_S^2 < 1$	$k_S^2$	$k_S^2$	$k_{am}^2 < 0$	$x = x_S(1 - k_S^2) - K(k_S^2)(1 - k_S^2)$ $y = y_S(1 - k_S^2) - \frac{K(k_S^2)}{2}(1 - k_S^2)$	$u = -v_S$ $v = u_S + \frac{1}{4} \ln k_S^2$	$0 < k_S^2 < 1$	$x = x_S(1 + k_S^2)$ $y = y_S(1 + k_S^2) - \frac{K(k_S^2)}{2}(1 + k_S^2)$	$u = \frac{\pi}{2} - v_S$ $v = u_S + \frac{1}{4} \ln k_S^2$
1b			$k_S^2 > 1$	$k_S^2 = \frac{1}{k_S'^2}$	$k_S^2 = \frac{1}{k_S'^2}$		$x = x_S \frac{k_S^2 - 1}{k_S'^2} - K(k_S'^2) \frac{k_S^2 - 1}{2}$ $y = y_S \frac{k_S^2 - 1}{k_S'^2} - \frac{K(k_S'^2)}{2} \frac{k_S^2 - 1}{2}$	$u = -v_S$ $v = u_S + \frac{1}{4} \ln k_S^2$		$x = x_S \frac{k_S^2 + 1}{k_S'^2}$ $y = y_S \frac{k_S^2 + 1}{k_S'^2} - \frac{K(k_S'^2)}{2} \frac{k_S^2 + 1}{2}$	$u = \frac{\pi}{2} - v_S$ $v = u_S + \frac{1}{4} \ln k_S^2$
1c		$< 0$	$k_S^2 < 0$	$k_S^2 = -\frac{b_S^2}{k_S'^2}$	$k_S^2 = -\frac{b_S^2}{k_S'^2}$	$0 < k_S^2 < 1$	$x = \sqrt{\frac{k_S^2 k_S'^2}{2}} \frac{1}{k_S'^2} \left( \frac{2}{k_S'^2} x_S - K(k_S'^2) \right)$ $y = \sqrt{\frac{k_S^2 k_S'^2}{2}} \frac{1}{k_S'^2} \left( \frac{2}{k_S'^2} y_S - K(k_S'^2) \right)$	$u = \frac{\pi}{4} - v_S$ $v = u_S + \frac{1}{4} \ln \frac{k_S^2}{k_S'^2}$	$0 < k_S^2 < 1$	$x = \sqrt{\frac{k_S^2 k_S'^2}{2}} \frac{1}{k_S'^2} \left( \frac{2}{k_S'^2} x_S - K(k_S'^2) \right)$ $y = \sqrt{\frac{k_S^2 k_S'^2}{2}} \frac{1}{k_S'^2} \left( \frac{2}{k_S'^2} y_S - K(k_S'^2) \right)$	$u = -\frac{\pi}{4} - v_S$ $v = u_S + \frac{1}{4} \ln \frac{k_S^2}{k_S'^2}$
2a	$w = \ln \operatorname{cn}(z, k_C^2)$	$> 0$	$k_C^2 < 0$	$k_C^2 = \frac{-k_C'^2}{k_C'^2}$	$k_C^2 = \frac{-k_C'^2}{k_C'^2}$	$k_{am}^2 < 0$	$x = x_C \frac{k_C^2}{k_C'^2} + \frac{K(k_C'^2)}{2} \frac{k_C^2}{k_C'^2}$ $y = y_C \frac{k_C^2}{k_C'^2} + \frac{K(k_C'^2)}{2} \frac{k_C^2}{k_C'^2}$	$u = -v_C$ $v = u_C + \frac{1}{4} \ln k_C^2$		$x = x_C \frac{k_C^2}{k_C'^2} - \frac{K(k_C'^2)}{2} \frac{k_C^2}{k_C'^2}$ $y = y_C \frac{k_C^2}{k_C'^2} - \frac{K(k_C'^2)}{2} \frac{k_C^2}{k_C'^2}$	$u = \frac{\pi}{2} - v_C$ $v = u_C + \frac{1}{4} \ln k_C^2$
2b			$k_C^2 > 1$	$k_C^2 = \frac{1}{k_C'^2}$	$k_C^2 = \frac{1}{k_C'^2}$		$x = x_C \frac{k_C^2}{k_C'^2} + \frac{K(k_C'^2)}{2} \frac{k_C^2}{k_C'^2}$ $y = y_C \frac{k_C^2}{k_C'^2} + \frac{K(k_C'^2)}{2} \frac{k_C^2}{k_C'^2}$	$u = -v_C$ $v = u_C + \frac{1}{4} \ln k_C^2$	$0 < k_C^2 < 1$	$x = x_C \frac{k_C^2}{k_C'^2} - \frac{K(k_C'^2)}{2} \frac{k_C^2}{k_C'^2}$ $y = y_C \frac{k_C^2}{k_C'^2} - \frac{K(k_C'^2)}{2} \frac{k_C^2}{k_C'^2}$	$u = \frac{\pi}{2} - v_C$ $v = u_C + \frac{1}{4} \ln k_C^2$
2c		$< 0$	$0 < k_C^2 < 1$	$k_C^2$	$k_C^2$	$0 < k_C^2 < 1$ ( $k_C'^2 = k_C^2$ )	$x = \sqrt{\frac{k_C k_C'}{2}} \frac{1}{k_C'} \left( \frac{2}{k_C'} x_C - K(k_C') \right)$ $y = \sqrt{\frac{k_C k_C'}{2}} \frac{1}{k_C'} \left( \frac{2}{k_C'} y_C - K(k_C') \right)$	$u = -\frac{\pi}{4} - v_C$ $v = u_C + \frac{1}{4} \ln \frac{k_C^2}{k_C'}$	$0 < k_C^2 < 1$ ( $k_C'^2 = k_C^2$ )	$x = \sqrt{\frac{k_C k_C'}{2}} \frac{1}{k_C'} \left( \frac{2}{k_C'} x_C - K(k_C') \right)$ $y = \sqrt{\frac{k_C k_C'}{2}} \frac{1}{k_C'} \left( \frac{2}{k_C'} y_C - K(k_C') \right)$	$u = \frac{\pi}{4} - v_C$ $v = u_C + \frac{1}{4} \ln \frac{k_C^2}{k_C'}$
3a	$w = \ln \operatorname{dn}(z, k_D^2)$	$> 0$	$k_D^2 < 0$	$k_D^2 = \frac{-k_D'^2}{k_D'^2}$	$k_D^2 = \frac{-k_D'^2}{k_D'^2}$	$0 < k_{am}^2 < 1$	$x = x_D \frac{k_D^2}{k_D'^2} - \frac{K(k_D'^2)}{2} \frac{k_D^2}{k_D'^2}$ $y = y_D \frac{k_D^2}{k_D'^2} - \frac{K(k_D'^2)}{2} \frac{k_D^2}{k_D'^2}$	$u = -\frac{\pi}{4} - v_D$ $v = u_D + \frac{1}{4} \ln k_D^2$	$k_{am}^2 < 0$	$x = x_D \frac{k_D^2}{k_D'^2} + \frac{K(k_D'^2)}{2} \frac{k_D^2}{k_D'^2}$ $y = y_D \frac{k_D^2}{k_D'^2} + \frac{K(k_D'^2)}{2} \frac{k_D^2}{k_D'^2}$	$u = -v_D$ $v = u_D + \frac{1}{4} \ln k_D^2$
3b			$0 < k_D^2 < 1$	$k_D^2$	$k_D^2$		$x = x_D \frac{k_D^2}{k_D'^2} - \frac{K(k_D'^2)}{2} \frac{k_D^2}{k_D'^2}$ $y = y_D \frac{k_D^2}{k_D'^2} - \frac{K(k_D'^2)}{2} \frac{k_D^2}{k_D'^2}$	$u = -\frac{\pi}{4} - v_D$ $v = u_D + \frac{1}{4} \ln k_D^2$		$x = x_D \frac{k_D^2}{k_D'^2} + \frac{K(k_D'^2)}{2} \frac{k_D^2}{k_D'^2}$ $y = y_D \frac{k_D^2}{k_D'^2} + \frac{K(k_D'^2)}{2} \frac{k_D^2}{k_D'^2}$	$u = -v_D$ $v = u_D + \frac{1}{4} \ln k_D^2$
3c		$< 0$	$k_D^2 > 1$	$k_D^2 = \frac{1}{k_D'^2}$	$k_D^2 = \frac{1}{k_D'^2}$	$0 < k_D^2 < 1$	$x = \sqrt{\frac{k_D k_D'}{2}} \frac{1}{k_D'} \left( \frac{2}{k_D'} x_D - K(k_D') \right)$ $y = \sqrt{\frac{k_D k_D'}{2}} \frac{1}{k_D'} \left( \frac{2}{k_D'} y_D - K(k_D') \right)$	$u = -\frac{\pi}{4} - v_D$ $v = u_D + \frac{1}{4} \ln \frac{k_D^2}{k_D'}$	$0 < k_D^2 < 1$	$x = \sqrt{\frac{k_D k_D'}{2}} \frac{1}{k_D'} \left( \frac{2}{k_D'} x_D - K(k_D') \right)$ $y = \sqrt{\frac{k_D k_D'}{2}} \frac{1}{k_D'} \left( \frac{2}{k_D'} y_D - K(k_D') \right)$	$u = \frac{\pi}{4} - v_D$ $v = u_D + \frac{1}{4} \ln \frac{k_D^2}{k_D'}$



Äquivalenz von (1,3) mit (1,4) (d. h.  $z = z_f$ ,  $w = w_f$ ) mit (1,3) und damit auch (1,4) durch die folgenden Transformationen verbunden:

$$w_1 = \frac{w_f - C_1}{\tilde{\alpha}}, \quad z_1 = \tilde{\beta} (z_f - C_2) \quad \text{für } \Delta_1 > 0,$$

$$w_1 = \frac{w_f - C_1}{\tilde{\alpha}}, \quad z_1 = \frac{\tilde{\beta}}{\beta} (z_f - C_2) \quad \text{für } \Delta_1 < 0.$$

Tabelle 1 gibt eine schematische Übersicht über diese Zuordnungen (s. hierzu auch 9.), wobei wieder  $w$  und  $z$  statt  $w_1$  und  $z_1$  gesetzt wurde.

## 2. Die Ermittlung der Skalengleichungen und die geometrische Struktur der Nomogramme elliptischer Funktionen

Da nach 1. die Funktionen (1,3) und (1,4a, b, c) mit  $\Delta_1 > 0$  bzw.  $\Delta_1 < 0$  je untereinander äquivalent und durch bekannte Modul- und Argumenttransformationen (Tabelle 1) ineinander überführbar sind, genügt es, bei der Ermittlung der Skalengleichungen nur je einen dieser Fälle zu behandeln.

a) Die Funktion  $w = \alpha am(\beta z, k^2)$  für reelle Werte von  $k^2$  ( $\Delta_1 > 0$ )

Da  $\alpha^2$  und  $\beta^2$  reell sind, wird  $\alpha = \beta = 1$  gesetzt. Die nach 1. *geradlinigen Skalen* für  $u$  und  $v$  sollen zunächst *parallel* sein und die Darstellung

$$\left. \begin{array}{l} u\text{-Skala: } \xi = f_1(u) = 0, \quad \eta = g_1(u), \\ v\text{-Skala: } \xi = f_2(v) = c, \quad \eta = g_2(v) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2,1)$$

haben. Dann bestimmen sich nach [1] die Beschriftungsfunktionen  $g_1(u)$  und  $g_2(v)$  aus den Differentialgleichungen

$$\frac{g_1'}{g_1} = \varphi(u), \quad \frac{g_2'}{g_2} = \psi(v) \quad \dots \dots \dots (2,2)$$

mit

$$\varphi(u) = -2 \frac{z'^3 \bar{z}'' - \bar{z}'^3 z''}{z' \bar{z}' (z'^2 - \bar{z}'^2)}, \quad \psi(v) = 2i \frac{z'^3 \bar{z}'' + \bar{z}'^3 z''}{z' \bar{z}' (z'^2 - \bar{z}'^2)}.$$

Durch zwei Quadraturen ([1] Gl. (19b, c)) ergibt sich für  $w = am(z, k^2)$ :

$$g_1(u) = c_1 \cos 2u + d_1, \quad g_2(v) = c_2 \cosh 2v + d_2. \quad \dots \dots \dots (2,3)$$

mit willkürlichen Integrationskonstanten  $c_1, c_2, d_1, d_2$ . Bezeichnet

$$\begin{array}{ll} \xi = f_3(x), & \eta = g_3(x) \quad \text{die Parameterdarstellung der } x\text{-Skala,} \\ \xi = f_4(y), & \eta = g_4(y) \quad \text{die Parameterdarstellung der } y\text{-Skala,} \end{array}$$

so gewinnt man diese bei bekanntem  $g_1(u), g_2(v)$  und gegebenem  $u(x, y)$  und  $v(x, y)$  nach [1] aus den Gleichungen

$$\left. \begin{array}{l} f_3(x) = c \frac{g_1' u_y}{g_1' u_y - g_2' u_x}, \\ g_3(x) = \frac{f_3(x)}{c} (g_2 - g_1) + g_1 = \frac{g_1' g_2 u_y - g_1 g_2' u_x}{g_1' u_y - g_2' u_x}, \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2,4)$$

$$\left. \begin{array}{l} f_4(y) = c \frac{g_1' u_x}{g_1' u_x + g_2' u_y}, \\ g_4(y) = \frac{f_4(y)}{c} (g_2 - g_1) + g_1 = \frac{g_1' g_2 u_x + g_1 g_2' u_y}{g_1' u_x + g_2' u_y}, \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2,5).$$

Nach längerer Zwischenrechnung erhält man:

$$\left. \begin{array}{l} f_3(x) = c \frac{c_1 k^2 \operatorname{sn}^2(x, k^2) \operatorname{cn}^2(x, k^2)}{c_1 k^2 \operatorname{sn}^2(x, k^2) \operatorname{cn}^2(x, k^2) + c_2 \operatorname{dn}^2(x, k^2)}, \\ g_3(x) = \frac{c_1 c_2 (\operatorname{cn}^2(x, k^2) - \operatorname{sn}^2(x, k^2) \operatorname{dn}^2(x, k^2))}{c_1 k^2 \operatorname{sn}^2(x, k^2) \operatorname{cn}^2(x, k^2) + c_2 \operatorname{dn}^2(x, k^2)} + \frac{f_3(x)}{c} (d_2 - d_1) + d_1 \end{array} \right\} \dots \dots (2,6)$$

$$\left. \begin{array}{l} f_4(y) = c \frac{c_1 \operatorname{cn}^2(y, k'^2) \operatorname{dn}^2(y, k'^2)}{c_1 \operatorname{cn}^2(y, k'^2) \operatorname{dn}^2(y, k'^2) - c_2 k^2 \operatorname{sn}^2(y, k'^2)}, \\ g_4(y) = \frac{c_1 c_2 (1 - k'^2 \operatorname{sn}^4(y, k'^2))}{c_1 \operatorname{cn}^2(y, k'^2) \operatorname{dn}^2(y, k'^2) - c_2 k^2 \operatorname{sn}^2(y, k'^2)} + \frac{f_4(y)}{c} (d_2 - d_1) + d_1 \end{array} \right\} \dots \dots (2,7).$$



Insgesamt ergeben sich  $\infty^4$  Nomogramme, deren Gesamtheit äquivalent ist mit der Gesamtheit aller Nomogramme, die man aus einem von ihnen mit festen  $c_i$ ,  $d_i$  durch alle projektiven Transformationen gewinnt, welche die beiden parallelen geradlinigen Skalen invariant lassen.

Mit Hilfe der Fundamentalrelationen der JACOBISCHEN elliptischen Funktion gewinnt man aus (2,6), (2,7) die implizite Gleichung des gemeinsamen Skalenträgers der  $x$ - und der  $y$ -Skala:

$$k^2 [(d_1 - d_2)^2 - (c_1 - c_2)^2] \xi^2 + 2(d_1 - d_2) c \xi \eta + c^2 \eta^2 + 2(c_1^2 - c_1 c_2 + d_1 d_2 - d_1^2) c \xi - 2 d_1 c^2 \eta + (d_1^2 - c_1^2) c^2 - 4 c_1 c_2 \xi (\xi - c) = 0 \quad (2,8).$$

Gl. (2,8) stellt einen Kegelschnittbüschel mit  $k^2$  als Büschelparameter dar. Für jeden festen Wert von  $k^2$  liegen die Skalen für  $x$  und für  $y$  auf einem Kegelschnitt dieses Büschels. Der Büschel besitzt vier reelle Grundpunkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  mit den Koordinaten

$$\left. \begin{array}{ll} P_1) \quad \xi = 0, & \eta = d_1 + c_1, \\ P_2) \quad \xi = 0, & \eta = d_1 - c_1, \\ P_3) \quad \xi = c, & \eta = d_2 + c_2, \\ P_4) \quad \xi = c, & \eta = d_2 - c_2 \end{array} \right\} \dots (2,9).$$

Für  $k^2 = 0$  und  $k^2 = 1$  zerfällt der skalentragende Kegelschnitt stets in ein reelles Geradenpaar. Die zu  $k^2 = 0$  gehörige  $x$ - bzw.  $y$ -Skala fällt mit der  $u$ - bzw.  $v$ -Skala zusammen, da für  $k^2 = 0$  die Funktion  $w = am(z, k^2)$  in  $w = z$  entartet [1]. Der dritte zerfallende Kegelschnitt des Büschels ist das Geradenpaar, das man aus (2,8) für  $k^2 \rightarrow \infty$  erhält.

Zu vorgegebenen Werten  $c_1, c_2, d_1, d_2, c$  gibt es genau einen Kegelschnittbüschel, der im folgenden als ein Nomogramm bezeichnet werden soll. Indem man dieses Nomogramm allen projektiven Transformationen der  $\xi\eta$ -Ebene unterwirft, gewinnt man aus ihm alle möglichen Nomogramme. Eine Untergruppe der projektiven Transformationen bilden diejenigen, welche die beiden parallelen Skalenträger (2,1) fest lassen, eine andere Untergruppe diejenigen, welche zu zwei aufeinander senkrechten Trägern für die  $u$ - und die  $v$ -Skala führen. (Man gewinnt alle praktisch interessierenden Nomogrammformen durch Beschränkung auf diese beiden Typen.) Durch die Transformation

$$\xi_1 = \frac{\xi - c}{c \eta}, \quad \eta_1 = \frac{-\xi}{c \eta} \dots (2,10)$$

wird (2,1) projektiv auf die  $\xi_1\eta_1$ -Ebene abgebildet, so daß die  $u$ -Skala auf die  $\xi_1$ -Achse, die  $v$ -Skala auf die  $\eta_1$ -Achse fällt. Die Darstellungen der vier Skalen sind jetzt

$$\left. \begin{array}{l} u\text{-Skala: } F_1(u) = \frac{-1}{c_1 \cos 2u + d_1}, \quad G_1(u) = 0, \\ v\text{-Skala: } F_2(v) = 0, \quad G_2(v) = \frac{-1}{c_2 \cosh 2v + d_2} \end{array} \right\} \dots (2,11),$$

$x$ -Skala:

$$\left. \begin{array}{l} F_3(x) = \frac{-c_2 dn^2(x, k^2)}{c_1 c_2 (cn^2(x, k^2) - sn^2(x, k^2) dn^2(x, k^2)) + c_1 d_2 k^2 sn^2(x, k^2) cn^2(x, k^2) + c_2 d_1 dn^2(x, k^2)} \\ G_3(x) = \frac{-c_1 k^2 sn^2(x, k^2) cn^2(x, k^2)}{c_1 c_2 (cn^2(x, k^2) - sn^2(x, k^2) dn^2(x, k^2)) + c_1 d_2 k^2 sn^2(x, k^2) cn^2(x, k^2) + c_2 d_1 dn^2(x, k^2)} \end{array} \right\} \quad (2,12),$$

$y$ -Skala:

$$\left. \begin{array}{l} F_4(y) = \frac{c_2 k^2 sn^2(y, k'^2)}{c_1 c_2 (1 - k'^2 sn^4(y, k'^2)) + c_1 d_2 cn^2(y, k'^2) dn^2(y, k'^2) - c_2 d_1 k^2 sn^2(y, k'^2)} \\ G_4(y) = \frac{-c_1 cn^2(y, k'^2) dn^2(y, k'^2)}{c_1 c_2 (1 - k'^2 sn^4(y, k'^2)) + c_1 d_2 cn^2(y, k'^2) dn^2(y, k'^2) - c_2 d_1 k^2 sn^2(y, k'^2)} \end{array} \right\} \quad (2,13).$$

Der Büschel (2,8) geht durch die projektive Transformation (2,10) in

$$k^2 [(c_1^2 - d_1^2) \xi_1^2 + 2(c_1 c_2 - d_1 d_2) \xi_1 \eta_1 + (c_2^2 - d_2^2) \eta_1^2 - 2 d_1 \xi_1 - 2 d_2 \eta_1 - 1] - 4 c_1 c_2 \xi_1 \eta_1 = 0 \quad (2,14)$$

über. Für jeden festen Wert von  $k^2$  liegen die Skalen für  $x$  und für  $y$  auf einem Kegelschnitt dieses Büschels. Er besitzt die vier reellen Grundpunkte  $P_1, P_2, P_3, P_4$  mit den Koordinaten

$$\left. \begin{array}{ll} P_1) \quad \xi_1 = \frac{-1}{c_1 + d_1}, & \eta_1 = 0, \\ P_2) \quad \xi_1 = \frac{1}{c_1 - d_1}, & \eta_1 = 0, \\ P_3) \quad \xi_1 = 0, & \eta_1 = \frac{-1}{c_2 + d_2}, \\ P_4) \quad \xi_1 = 0, & \eta_1 = \frac{1}{c_2 - d_2} \end{array} \right\} \quad (2,15).$$







nächsten Grundpunkt. Dort kehrt sie um, läuft dieselbe Skala zurück und erreicht im Ausgangspunkt die Werte  $\pm 2K(k^2)$  (bzw.  $\pm 2K'(k^2)$ ). Dieser Vorgang läßt sich beliebig oft wiederholen, so daß jeder Skalenpunkt eine abzählbar unendliche Folge von Beschriftungsziffern trägt derart, daß außer dem angeschriebenen Wert  $\pm t$  auch die Werte  $2nK \pm t$  ( $n$  ganz) auf den  $x$ -Skalen (bzw.  $\pm t, 2nK' \pm t$  auf den  $y$ -Skalen) anzuschreiben sind (s. hierzu 12.<sup>8)</sup>).

Die Punkte  $x = \text{const}$  bzw.  $y = \text{const}$  sind durch Kurven miteinander verbunden. Wegen der mehrdeutigen Bezifferung jedes Skalenpunktes gehen durch jeden Punkt des Bereiches der  $\xi\eta$ -Ebene, der von Skalen überdeckt wird, zwei solche Kurven, von denen jeweils nur die eine eingezeichnet ist. Diese Kurven ermöglichen eine Interpolation zwischen den Werten  $k^2 = \text{const}$ . Ihre Parameterdarstellung ist mit  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$  durch (2,6), (2,7) bzw. (2,12), (2,13) gegeben.

Alle Skalenpunkte  $x = K(k^2)/2$  und  $y = K'(k^2)/2$  liegen auf den Seiten des Diagonaldreiecks  $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$ , das zu dem vollständigen Viereck  $P_1P_2P_3P_4$  gehört und zugleich das gemeinsame Polardreieck des Kegelschnittbüschels ist.

Da diese Eigenschaft gegenüber projektiven Transformationen invariant ist, genügt es, sie für den Fall paralleler Geraden als Skalenträger für  $u$  und  $v$  zu beweisen. (In diesem Falle ist  $\Pi_1$  stets Fernpunkt.) Setzt man in (2,6)  $x = K(k^2)/2$  ein, so erhält man für  $0 < k^2 < 1$  auf Grund bekannter Eigenschaften der JACOBI-Funktionen

$$f_3(K/2) = c \frac{c_1(1-k')^2}{c_1(1-k')^2 + c_2k^2}, \quad g_3(K/2) = \frac{c_1d_2(1-k')^2 + c_2d_1k^2}{c_1(1-k')^2 + c_2k^2} \dots \dots (2,18)$$

als Parameterdarstellung einer Geraden mit der Gleichung

$$\eta = \frac{\xi}{c} (d_2 - d_1) + d_1 \dots \dots \dots (2,18a).$$

(2,18a) stellt gleichzeitig die Verbindungsgerade  $\Pi_2\Pi_3$  dar. Setzt man analog in (2,7)  $y = K'(k^2)/2 = K(k^2)/2$  ein, so wird für  $0 < k^2 < 1$ :

$$\xi = c c_1/(c_1 - c_2) = \text{const} \dots \dots \dots (2,19).$$

Dies ist die Parallele zur  $\eta$ -Achse durch  $\Pi_2$ . Sie verläuft auch durch den (unendlich fernen) Schnittpunkt  $\Pi_1$  von  $P_1P_2$  mit  $P_3P_4$ : Für  $0 < k^2 < 1$  liegen also alle Punkte  $x = K(k^2)/2$  auf der Geraden  $\Pi_2\Pi_3$ , für  $0 < k^2 < 1$  liegen alle Punkte  $y = K'(k^2)/2$  auf  $\Pi_1\Pi_2$ . Ferner zeigt sich noch, daß für  $k^2 < 0$  die Punkte  $x = K(k^2)/2$  ebenfalls auf  $\Pi_2\Pi_3$ , die Punkte  $y = K'(k^2)/2$  auf  $\Pi_1\Pi_3$  liegen; für  $k^2 > 1$  liegen die Punkte  $x = K(k^2)/2$  auf  $\Pi_1\Pi_3$ , die Punkte  $y = K'(k^2)/2$  auf  $\Pi_1\Pi_2$ . Die Lage des Polardreiecks  $\Pi_1\Pi_2\Pi_3$  erlaubt Rückschlüsse auf die Länge der Teilintervalle der Skalengraduierung (s. hierzu 5. und 6.).

b) Die Funktion  $w = \alpha \operatorname{am}(\beta z, k^2)$  für komplexe Werte von  $k^2$  ( $\Delta_1 < 0$ )

Die Funktion (1,3) ist nach 1. mit  $\beta^2 = \frac{a_2}{2-k^2}$  für eine  $\infty^1$ -fache Mannigfaltigkeit von komplexen Werten  $k^2$ , die einer der drei Gln. (1,5a, b, c) genügen, durch ein Fluchtliniennomogramm darstellbar. Es ist zweckmäßig, zunächst die Skalengleichungen für das Nomogramm einer mit (1,3) äquivalenten Funktion (1,4a, b, c) zu ermitteln; hierzu wird  $w = \ln cn(z, k_c^2)$  gewählt. Die Nomogramme aller übrigen Funktionen mit  $\Delta_1 < 0$ , also auch der Funktion (1,3) mit komplexem Modul  $k^2$ , können dann aus diesem durch Anwendung der zugehörigen Argument- und Modultransformation gemäß Tabelle 1 entwickelt werden. Wegen  $\alpha^2 = -1$  (Gl. 1,10) ist es jetzt zweckmäßig, die  $v$ -Skala auf  $\xi = 0$  und die  $u$ -Skala auf  $\xi = c$  zu legen. Dann erhält man nach 2a. bei parallelen Skalen für  $u$  und  $v$ :

$$g_1(v) = c_1 \cos 2v + d_1, \quad g_2(u) = \frac{c_2}{2} \left( \frac{k_c}{k_c'} e^{2u} - \frac{k_c'}{k_c} e^{-2u} \right) + d_2 \dots \dots \dots (2,20),$$

$$\left. \begin{aligned} f_3(x) &= c \frac{c_1 k_c \operatorname{cn}^2(2x - K(k_c^2), k_c^2)}{c_1 k_c \operatorname{cn}^2(2x - K(k_c^2), k_c^2) + c_2 k_c'} \\ g_3(x) &= \frac{-c_1 c_2 \operatorname{sn}(2x - K(k_c^2), k_c^2) \operatorname{dn}(2x - K(k_c^2), k_c^2)}{c_1 k_c \operatorname{cn}^2(2x - K(k_c^2), k_c^2) + c_2 k_c'} + \frac{f_3(x)}{c} (d_2 - d_1) + d_1 \end{aligned} \right\} (2,21),$$

$$\left. \begin{aligned} f_4(y) &= c \frac{c_1 k_c' \operatorname{cn}^2(2y - K(k_c'^2), k_c'^2)}{c_1 k_c' \operatorname{cn}^2(2y - K(k_c'^2), k_c'^2) - c_2 k_c} \\ g_4(y) &= \frac{c_1 c_2 \operatorname{sn}(2y - K(k_c'^2), k_c'^2) \operatorname{dn}(2y - K(k_c'^2), k_c'^2)}{c_1 k_c' \operatorname{cn}^2(2y - K(k_c'^2), k_c'^2) - c_2 k_c} + \frac{f_4(y)}{c} (d_2 - d_1) + d_1 \end{aligned} \right\} (2,22).$$

<sup>8)</sup> In allen Nomogrammen für  $w = \operatorname{am}(z, k^2)$  — außer Bild 1 — sowie in den Bildern 2 und 17 werden aus Gründen der Übersichtlichkeit nur die positiven Bezifferungswerte für  $x, y, u$  und  $v$  angeschrieben.



Aus (2,21), (2,22) gewinnt man wie in 2a. die Gleichung des Trägers der  $x$ - und der  $y$ -Skala:

$$\xi^2 [(d_1 - d_2)^2 + c_2^2 - c_1^2] + 2 (d_1 - d_2) c \xi \eta + c^2 \eta^2 + 2 c \xi [c_1^2 - d_1^2 + d_1 d_2] + \\ - 2 c^2 d_1 \eta + c^2 (d_1^2 - c_1^2) + 3 c_1 c_2 \xi (c - \xi) \lambda = 0 \quad \dots \dots (2,23).$$

Gl. (2,23) stellt einen Kegelschnittbüschel mit  $\lambda = \frac{2k_c^2 - 1}{3}$  als Büschelparameter dar. Für jeden festen Wert von  $\lambda$  liegen die  $x$ - und die  $y$ -Skala auf einem Kegelschnitt dieses Büschels<sup>9)</sup>. Der Büschel (2,23) besitzt zwei reelle Grundpunkte  $P_1, P_2$  mit den Koordinaten

$$P_1) \quad \xi = 0, \quad \eta = d_1 + c_1, \quad P_2) \quad \xi = 0, \quad \eta = d_1 - c_1 \quad \dots \dots (2,24a)$$

und zwei konjugiert komplexe Grundpunkte  $P_3, P_4$  mit den Koordinaten

$$P_3) \quad \xi = c, \quad \eta = d_2 + c_2 i, \quad P_4) \quad \xi = c, \quad \eta = d_2 - c_2 i. \quad \dots \dots (2,24b).$$

Der einzige reelle zerfallende Kegelschnitt des Büschels ist durch das Geradenpaar  $\xi = 0$  und  $\xi = c$  gegeben. Durch die Transformation (2,10) wird dem Büschel (2,23) ein Büschel mit senkrechten Skalenträgern für  $u$  und  $v$  mit der Gleichung

$$\xi_1^2 (d_1^2 - c_1^2) + 2 d_1 d_2 \xi_1 \eta_1 + \eta_1^2 (d_2^2 + c_2^2) + 2 d_1 \xi_1 + 2 d_2 \eta_1 + 1 + 3 c_1 c_2 \xi_1 \eta_1 \lambda = 0 \quad (2,25)$$

zugeordnet. Die Gleichungen der zugehörigen Skalen findet man wie in 2a. Über den Typus des zu einem bestimmten Wert  $\lambda$  gehörenden Kegelschnitts als Träger der  $x$ - und der  $y$ -Skala entscheidet wiederum die Invariante  $J_2$ . Für den Büschel (2,23) bzw. (2,25) lautet sie

$$J_{2I} = (c_2^2 - c_1^2 - 3 c_1 c_2 \lambda) c^2 \quad \dots \dots \dots (2,23a),$$

$$J_{2II} = (d_2^2 + c_2^2) (d_1^2 - c_1^2) - \left( d_1 d_2 + \frac{3}{2} c_1 c_2 \lambda \right)^2 \quad \dots \dots \dots (2,25a).$$

Im Falle (2,23a) läßt sich  $c_1, c_2$  stets so wählen, daß für alle  $\lambda$ -Werte eines vorgegebenen Bereichs der Büschel (2,23) nur Ellipsen enthält, also  $J_{2I} > 0$  wird. Dagegen ist für  $d_1 = d_2 = 0$  für alle Werte  $\lambda$  stets  $J_{2II} < 0$ , der Büschel (2,25) enthält also nur Hyperbeln.

Bild 2 zeigt ein Nomogramm für die Funktion  $w = \ln cn(z, k_c^2)$  für den Bereich  $0 < k_c^2 < 1$  mit parallelen Skalen für  $u$  und  $v$ . Die beiden Grundpunkte  $P_1$  und  $P_2$  zerlegen jeden skalenträgenden Kegelschnitt derart in zwei Teile, daß der eine Teil die  $x$ -Skala, der andere die  $y$ -Skala trägt. Im Gegensatz zu den Nomogrammen mit vier reellen Grundpunkten haben jetzt die Skalenträger für  $x$  und  $y$  keine unbeschrifteten Teile.

Während bei den Nomogrammen für die Funktion (1,3) zu beliebigem  $k^2$  ein und dieselbe  $u$ -Skala gehört, ergibt sich für alle Funktionen (1,4a, b, c) für den Wert des Moduls  $k_1^2$  eine andere  $u$ -Skala, deren Träger jeweils die Gerade  $\xi = c$  ist. Diese von  $k_1^2$  abhängigen  $u$ -Skalen sind in Bild 2 parallel zu  $\xi = c$  gezeichnet, während die Gerade  $\xi = c$  unbeziffert bleibt und nur einen festen Bezugspunkt 0 erhält. Die Ablesegeraden werden zunächst mit  $\xi = c$  zum Schnitt gebracht. Der Abschnitt vom Bezugspunkt 0 bis zum Schnittpunkt wird dann auf die jeweilige  $u$ -Skala zur Ablesung des  $u$ -Wertes übertragen.

Mit Hilfe der in Tabelle 1 angegebenen Argument- und Modultransformationen gewinnt man aus den Skalengleichungen für  $w = \ln cn(z, k_c^2)$ ,  $0 < k_c^2 < 1$ , diejenigen für  $w = am(\beta z, k^2)$  mit komplexem  $k^2 = k_1 + i k_2$  und  $\beta^2 = \frac{a_2}{2 - k^2}$  sowohl für den Fall paralleler als auch sich senkrecht schneidender Skalen für  $u$  und  $v$ . Fordert man, daß  $k^2$  Gl. (1,5a) genügt, so wird  $a_2 = \gamma \frac{4 k_1 k_2}{k_1^2 - k_2^2}$ ,  $\gamma$  reell und damit  $\beta^2 = \frac{2 \gamma i}{k^2}$ . Für den Fall sich senkrecht schneidender Skalen für  $u$  und  $v$  ergeben sich mit  $d_1 = d_2 = 0$  die Gleichungen:

$$G_1(u) = \frac{1}{c_1 \sin 2u + d_1}, \quad G_2(v) = \frac{-1}{c_2 \sinh 2v + d_2} \quad \dots \dots \dots (2,26),$$

$$\left. \begin{aligned} F_3(x) &= \frac{-c_2 k^* k^{*'}}{c_1 c_2 k^* \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{2}{k^* k^{*'}}} x, k^{*2} \right) \operatorname{dn} \left( \sqrt{\frac{2}{k^* k^{*'}}} x, k^{*2} \right)} \\ &\quad - c_1 k^{*2} \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{2}{k^* k^{*'}}} x, k^{*2} \right) \\ G_3(x) &= \frac{-c_1 k^{*2} \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{2}{k^* k^{*'}}} x, k^{*2} \right)}{c_1 c_2 k^* \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{2}{k^* k^{*'}}} x, k^{*2} \right) \operatorname{dn} \left( \sqrt{\frac{2}{k^* k^{*'}}} x, k^{*2} \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2,27),$$

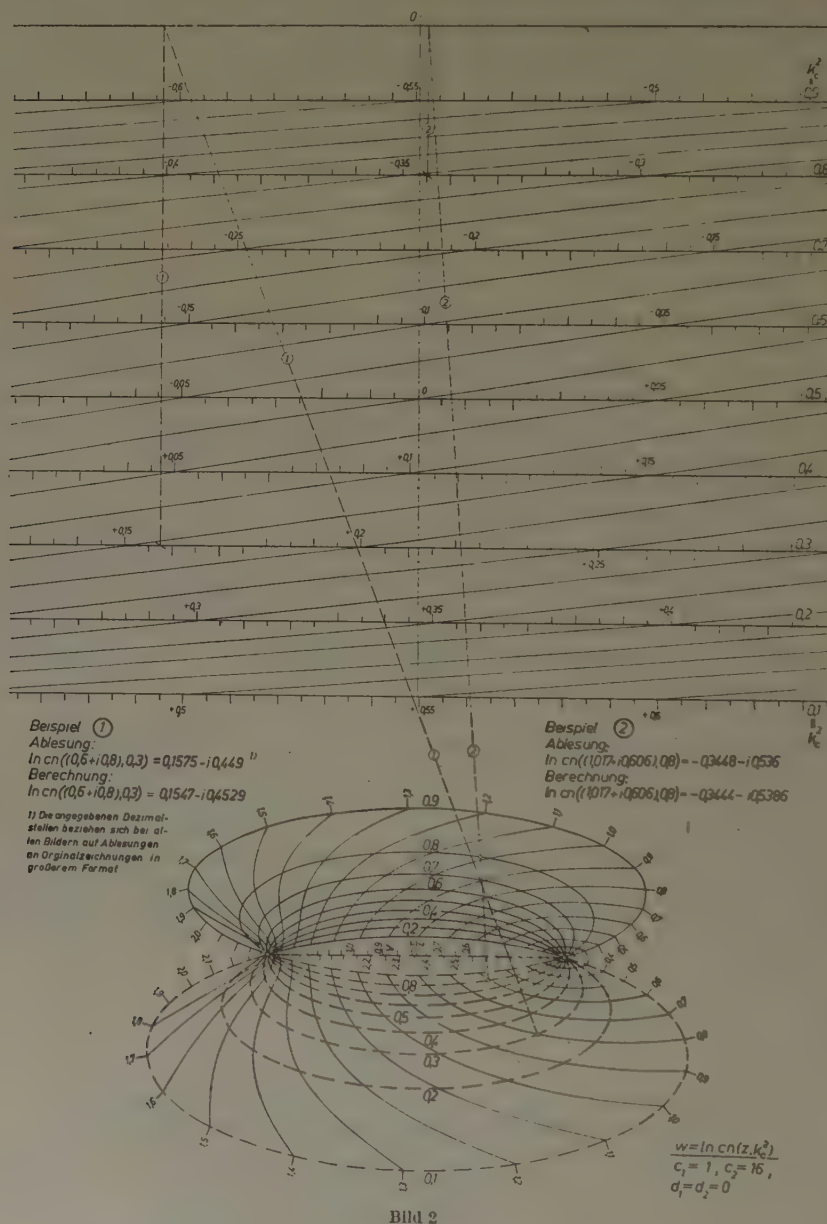
<sup>9)</sup> Die Skalengln. (2,21), (2,22) und (2,6), (2,7) (und damit auch die zugeordneten Büschelgln. (2,23) und (2,8)) lassen sich mit Hilfe komplexer Modul- und Argumenttransformationen, die dem Übergang  $\Delta_1 < 0$  in  $\Delta_1 > 0$  entsprechen, ineinander überführen.



$$\left. \begin{aligned} F_4(y) &= - \frac{c_2 k^* k'^*}{c_1 c_2 k'^* \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{2}{k^* k'^*}} y, k'^{*2} \right) \operatorname{dn} \left( \sqrt{\frac{2}{k^* k'^*}} y, k'^{*2} \right)} \\ G_4(y) &= - \frac{c_1 k'^{*2} \operatorname{cn}^2 \left( \sqrt{\frac{2}{k^* k'^*}} y, k'^{*2} \right)}{c_1 c_2 k'^* \operatorname{sn} \left( \sqrt{\frac{2}{k^* k'^*}} y, k'^{*2} \right) \operatorname{dn} \left( \sqrt{\frac{2}{k^* k'^*}} y, k'^{*2} \right)} \end{aligned} \right\} \dots \dots (2,28).$$

Dabei bedeutet  $k'^{*2}$  einen reellen Ersatzmodul, der mit dem komplexen Modul  $k^2$  wie folgt verknüpft ist:

$$k'^{*2} = \frac{1}{2} - \frac{(k^2 - 2)}{4k'}.$$



### 3. Symmetrische Nomogrammformen

#### a) Nomogramme mit zwei reellen Grundpunkten

Es sollen zunächst die Nomogramme für  $w = \operatorname{am}(\beta z, k^2)$ ,  $k^2$  und  $\beta^2$  komplex, mit aufeinander senkrechten Skalen für  $u$  und  $v$  untersucht werden. Die hierzu gehörigen Gln. (2,27) und



(2,28) der  $x$ - und der  $y$ -Skala lassen für  $d_1 = d_2 = 0$  eine bemerkenswerte Symmetrieeigenschaft erkennen. Es ist nämlich

$$\left. \begin{aligned} F_3(x, k^{*2}) &= -F_4(y, k^{*2}) \\ G_3(x, k^{*2}) &= G_4(y, k^{*2}) \end{aligned} \right\} \text{ für } x = y \dots \dots \dots (3,1).$$

Bild 3 zeigt ein Nomogramm mit dieser Symmetrieeigenschaft. Vom Standpunkt der projektiven Geometrie kann man die Symmetrieeigenschaft wie folgt deuten: Die Verbindungsgeraden von Skalenpunkten  $P(x, k^{*2})$  und  $Q(y, k^{*2})$ , für die  $x = y$  ist, bilden einen Parallelstrahlenbüschel mit dem Fernpunkt  $F_\infty$  als Zentrum. Ist  $S$  der Schnittpunkt von  $PQ$  mit der  $\eta$ -Achse, so ist das Doppelverhältnis  $(PQS F_\infty) = -1$ .

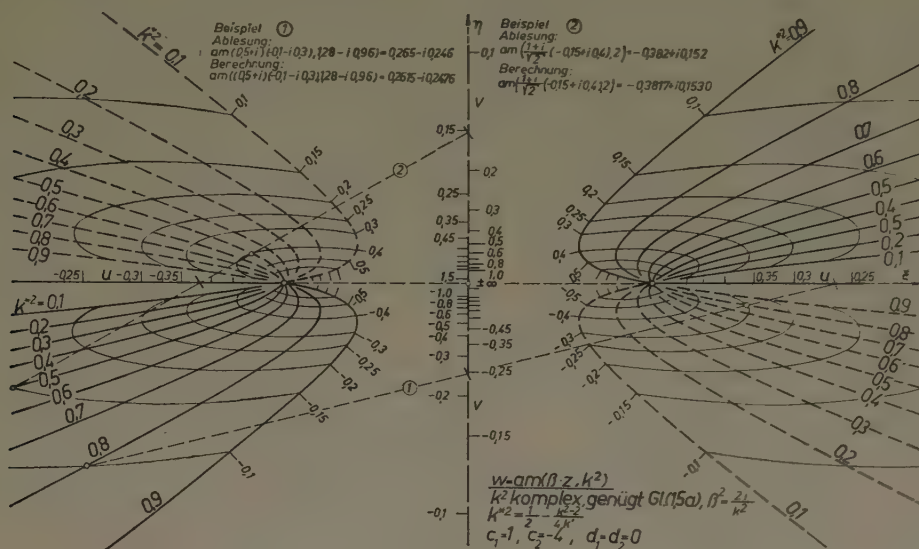


Bild 3

Ein Nomogramm mit parallelen Skalen für  $u$  und  $v$  kann eine Symmetrie nicht besitzen. Denn es enthält stets für einen gewissen Bereich  $0 < k_0^{*2} < k^{*2} < 1$  Ellipsen, für  $k^{*2} = k_0^{*2}$  eine Parabel und für  $0 < k^{*2} < k_0^{*2}$  Hyperbeln, wobei der Wert von  $k_0^{*2}$  von der Wahl der „Formgebungskonstanten“  $c_1, c_2, d_1, d_2$  abhängt. Es kann also der Fall eintreten, daß zum Modul  $k^{*2}$  eine Ellipse gehört, zum Modul  $k^{*2}$  aber eine Hyperbel.

#### b) Nomogramme mit vier reellen Grundpunkten

Es ist nun zu untersuchen, ob sich unter der Gesamtheit aller projektiv äquivalenten Nomogrammformen für  $w = am(z, k^2)$ ,  $k^2$  reell, ein bestimmtes Nomogramm oder eine ausgezeichnete Untermannigfaltigkeit von Nomogrammen mit der Symmetrieeigenschaft (3,1) befindet. Wenn es solche Nomogramme gibt, so müssen bei einem beliebigen Nomogramm stets die Verbindungsgeraden von Skalenpunkten  $P_i(x_i, k^2)$  und  $Q_i(y_i = x_i, k^2)$  durch einen festen Punkt  $G$  gehen, und es muß eine feste Gerade  $s$  geben, so daß für den Schnittpunkt  $S_i$  einer Geraden  $P_iQ_iG$  mit  $s$  stets gilt:

$$(P_i Q_i S_i G) = -1 \dots \dots \dots (3,2)$$

Insbesondere muß dies für  $P_0(0, k^2) = P_1$  und  $Q_0(0, k^2) = P_3$  gelten, so daß  $(P_0 Q_0 S_0 G) = (P_1 P_3 S_0 G) = -1$  ist (s. hierzu Bild 1).

Nun läßt sich analytisch nachweisen, daß die Verbindungsgerade eines beliebigen Skalenpunktes  $P(x, k^2)$  mit  $Q(y = x, k^2)$  durch den Schnittpunkt  $G$  von  $P_1 P_3$  mit  $\Pi_1 \Pi_3$  verläuft. Daher ist der Punkt  $S_0$  mit dem Eckpunkt  $\Pi_2$  des Polardreiecks, dem Pol der Seite  $\Pi_1 \Pi_3$ , identisch. Die Gerade  $s$  muß also durch  $\Pi_2$  verlaufen. Ferner fallen für  $0 < k^2 < 1$  die Punkte  $P(K(k^2), k^2)$ ,  $Q(K'(k^2), k^2)$  und damit auch  $S$  in  $P_2$  zusammen, d. h.  $s$  ist die Verbindungsgerade  $\Pi_2 P_2$  und  $P_4$  liegt auf dieser Geraden. Ist  $G$  Fernpunkt, so wird  $\Pi_2$  zum Halbierungspunkt von  $\bar{P}_1 P_3$  und  $P_2 P_4$  wird zur Symmetrieachse. Daher erhält man die Skalengleichungen für ein symmetrisches Nomogramm, indem man ein beliebiges der projektiv äquivalenten Nomogramme so transformiert, daß der transformierte Punkt  $G^*$  der Fernpunkt von  $P_1 P_3$  wird. Die Rechnung soll für ein spezielles Nomogramm mit parallelen Skalenträgern für  $u$  und  $v$  durchgeführt werden und zwar für



$c_1 = c_2 = 1$ ,  $d_1 = d_2 = 0$ ,  $c = 1$ . Haben  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  die Bedeutung von *Bild 4* (nicht zu verwechseln mit  $\alpha$ ,  $\beta$  in (1,3)), so lautet die zugehörige Transformation mit  $\alpha = 1$

$$\left. \begin{aligned} \xi^* &= \gamma \frac{\eta + 1}{4\xi - (1 + 2\beta)\eta - (1 - 2\beta)}, \\ \eta^* &= \beta \frac{4\xi + \eta - 3}{4\xi - (1 + 2\beta)\eta - (1 - 2\beta)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3,3).$$

Setzt man (2,6), (2,7) in (3,3) ein, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} f_3^*(x) &= \frac{\gamma cn^2 x}{cn^2 x (k^2 sn^2 x - dn^2 x) + 2\beta sn^2 x dn^2 x}, \\ g_3^*(x) &= \frac{cn^2 x - 2dn^2 x}{cn^2 x (k^2 sn^2 x - dn^2 x) + 2\beta sn^2 x dn^2 x} \end{aligned} \right\} \text{(Modul } k^2) \dots \dots (3,4),$$

$$\left. \begin{aligned} f_4^*(y) &= \frac{-\gamma cn^2 y}{cn^2 y (k'^2 sn^2 y - dn^2 y) + 2\beta sn^2 y dn^2 y}, \\ g_4^*(y) &= \frac{cn^2 y - 2dn^2 y}{cn^2 y (k'^2 sn^2 y - dn^2 y) + 2\beta sn^2 y dn^2 y} \end{aligned} \right\} \text{(Modul } k'^2) \dots \dots (3,5).$$

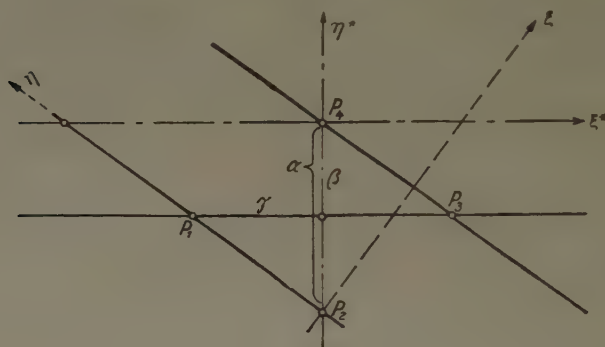


Bild 4

Die Skalengleichungen (3,4), (3,5) sind auf ein Koordinatensystem bezogen, dessen  $\eta^*$ -Achse mit der Symmetrieachse des Nomogramms zusammenfällt. Es gilt

$$f_3^*(x, k^2) = -f_4^*(y, k'^2), \quad g_3^*(x, k^2) = g_4^*(y, k'^2) \dots \dots \dots (3,6).$$

Die Skalen für  $u$  bzw.  $v$  liegen auf den Verbindungsgeraden  $P_1^*P_2^*$  bzw.  $P_3^*P_4^*$ .

Je nach Wahl von  $\beta$ ,  $\gamma$  erhält man ein symmetrisches Nomogramm mit parallelen, senkrechten oder sich unter einem beliebigen Winkel schneidenden Skalenträgern für  $u$  und  $v$ . Verlangt man, daß die Skalenträger für  $u$  und  $v$  orthogonal sind, so wird  $\beta$  ( $\beta + 1$ ) =  $\gamma^2$ . Sollen sie parallel sein, so ist  $\beta = -1/2$  bei beliebigem  $\gamma$ . Sind  $\beta$  und  $\gamma$  beliebig, so ergibt sich ein Nomogramm mit einem im allgemeinen von 0 und  $\pi/2$  verschiedenen Winkel der Skalenträger für  $u$  und  $v$ . Symmetrische Nomogramme mit parallelen Skalenträgern für  $u$  und  $v$  unterscheiden sich also nur durch den Wert von  $\gamma$  und damit durch den Abstand der parallelen Skalen. Es gibt daher im wesentlichen nur ein symmetrisches Nomogramm mit parallelen, dagegen  $\infty^1$  symmetrische Nomogramme mit senkrechten und schließlich  $\infty^2$  mit sich schiefwinklig schneidenden Skalenträgern für  $u$  und  $v$ . Setzt man  $\beta = 1/2$ , so erlauben (3,4) und (3,5) die Berechnung eines symmetrischen Nomogramms mit senkrechten und eines solchen mit parallelen Skalen für  $u$  und  $v$  in einem Rechnungsgang. Bei parallelen Skalen gehören zum Kegelschnittbüschel für  $0 < k^2 < 1$  Ellipsen, für  $k^2 < 0$  und  $k^2 > 1$  Hyperbeln; bei senkrechten Skalen erhält man stets Hyperbeln.

Die symmetrischen Nomogramme mit parallelen bzw. senkrechten Skalen für  $u$  und  $v$  ergeben sich aber auch als Sonderfälle von (2,6), (2,7) bzw. (2,12), (2,13) für spezielle Werte der Formgebungskonstanten  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $c$ . In diesen Gleichungen läßt sich eine Symmetrie des Nomogramms zunächst nicht erkennen, da sie nicht auf ein hierzu geeignetes Koordinatensystem bezogen sind. Zur Ermittlung der Werte  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$ ,  $d_2$  und  $c$ , die zu den symmetrischen Nomogrammen gehören, wird das System  $\xi^*$ ,  $\eta^*$  mit der  $\eta^*$ -Achse als Symmetrieachse durch Parallelverschiebung und Drehung in ein System  $\xi$ ,  $\eta$  übergeführt, wie es (2,6), (2,7) bzw. (2,12), (2,13) zugrunde liegt.







Unter den symmetrischen Nomogrammen mit senkrechten Skalen für  $u$  und  $v$  ist das in *Bild 6* dargestellte besonders ausgezeichnet. Die drei Grundpunkte  $P_1, P_2, P_3$  bilden ein gleichseitiges Dreieck; der vierte Grundpunkt  $P_4$  liegt im Schwerpunkt dieses Dreiecks, das die  $\xi\eta$ -Ebene in zwei Bereiche zerlegt. Durch jeden Punkt des Bereichs, der  $P_4$  nicht enthält, verläuft genau eine  $x$ - bzw.  $y$ -Skala, während der Bereich, der  $P_4$  enthält, von Skalenpunkten gänzlich frei bleibt. Alle Skalenträger für  $x$  und  $y$  sind Hyperbeln. Außer der Symmetrieachse  $P_2P_4$  sind auch  $P_1P_4$  und  $P_3P_4$  Symmetrieachsen mit Symmetriebeziehungen, die gegenüber (3,6) auf Grund der Modultransformationen

$$k_1^2 = \frac{1}{k^2} \quad \text{sowie} \quad k_1^2 = -\frac{k^2}{k'^2} \quad \dots \quad (3,13)$$

und den zugehörigen Argumenttransformationen abgewandelt sind. Unter Benutzung dieser Eigenschaften gelangt man an *Bild 6* zu einer geometrischen Veranschaulichung der Argument- und Modultransformationen 1. Ordnung für die Funktion  $w = am(z, k^2)$  (s. hierzu auch *Bild 7*).

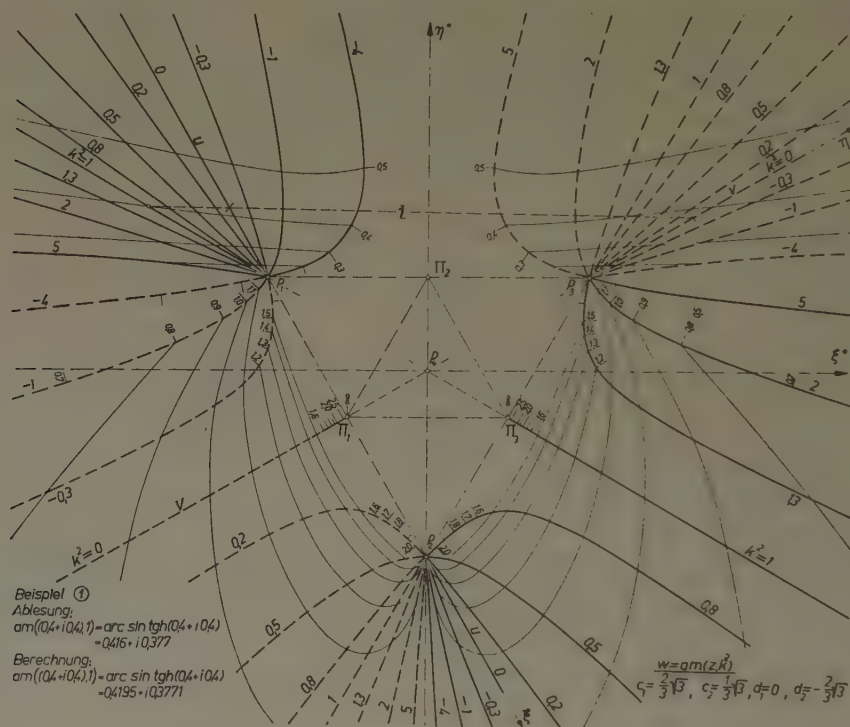


Bild 6

#### 4. Nomogramme mit Kreisen als Ablesekurven

Unterwirft man ein Fluchtliniennomogramm für  $w = am(\beta z, k^2)$  mit  $A_1 < 0$  oder  $A_1 > 0$  der Transformation (Inversion am Kreise vom Radius  $R$ )

$$\xi = R^2 \frac{\xi_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2}, \quad \eta = R^2 \frac{\eta_1}{\xi_1^2 + \eta_1^2} \quad \dots \quad (4,1),$$

so geht der die Skalen für  $x$  und  $y$  tragende Kegelschnittbüschel im allgemeinen in einen Büschel von (rationalen) Kurven 4. Ordnung über, die Ablesegeraden in Kreise durch  $\xi_1 = \eta_1 = 0$ . Wendet man (4,1) auf *Bild 6* an, wobei  $P_4$  als Inversionszentrum und der Kreis durch  $P_1, P_2, P_3$  als Inversionskreis gewählt wird, so geht der Kegelschnittbüschel in einen Büschel von Strophoiden (*Bild 7*) über mit dem Koordinatenanfangspunkt als gemeinsamem Doppelpunkt und drei weiteren reellen Grundpunkten, den transformierten Grundpunkten aus *Bild 6*. Jede Strophoide geht einmal durch die absoluten Kreispunkte. Die Gleichung des Strophoidenbüschels, bezogen auf ein  $\xi^* \eta^*$ -Koordinatensystem, dessen  $\eta^*$ -Achse mit  $P_2 P_4$  zusammenfällt, lautet:

$$k^2 \left[ (\sqrt{3} \eta^* + \xi^*) (\xi^{*2} + \eta^{*2}) + \sqrt{3} R^2 (\xi^{*2} - \eta^{*2}) + 2 R^2 \xi^* \eta^* \right] + \\ - 2 \xi^* (\xi^{*2} + \eta^{*2}) - 4 R^2 \xi^* \eta^* = 0 \quad \dots \quad (4,2).$$



## Beispiel ①

Ablesung:

$$\operatorname{am}(1+i0,65,0,2)=10,86+i0,533$$

Berechnung:

$$\operatorname{am}(1+i0,65,0,2)=10,753+i0,5933$$

## Beispiel ②

Ablesung:

$$\operatorname{am}(0,4+i0,4,1)=\arcsin \operatorname{tgh} 0,4+i0,4=0,420+i0,374$$

Berechnung:

$$\operatorname{am}(0,4+i0,4,1)=\arcsin \operatorname{tgh} 0,4+i0,4=0,4195+i0,3771$$

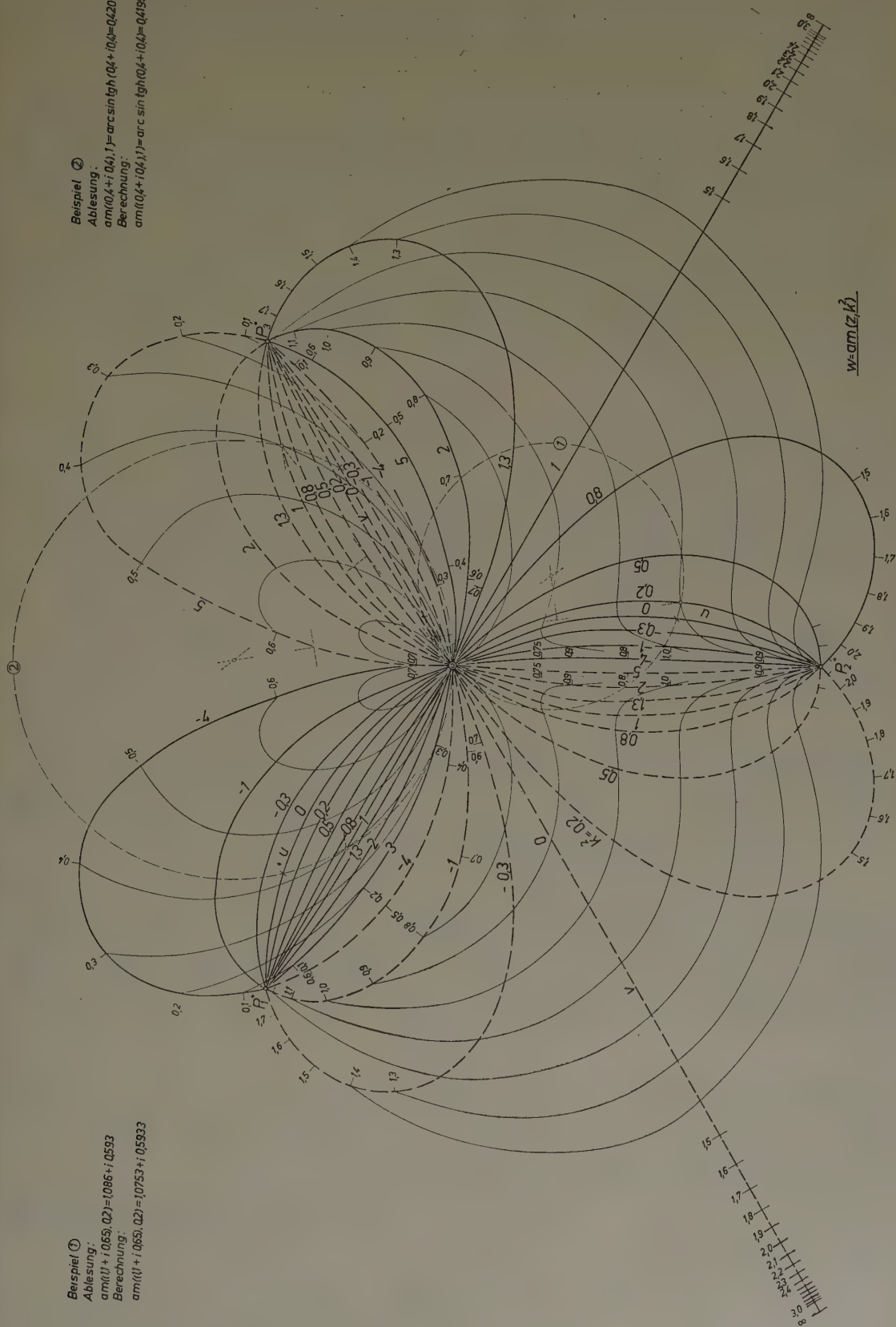


Bild 7



Die zerfallenden Kegelschnitte aus Bild 6 gehen je in eine Gerade und einen Kreis über. Insbesondere ist der Träger der  $u$ -Skala ein Stück eines Kreises durch die transformierten Grundpunkte  $P_1^*$ ,  $P_2^*$ ; der Träger der  $v$ -Skala ein Stück der Geraden durch den transformierten Punkt  $P_3^*$  und den gemeinsamen Doppelpunkt der Kurven. Die Ablesegeraden des Nomogramms Bild 6 werden in Bild 7 zu Kreisen, die alle durch den gemeinsamen Doppelpunkt der Strophoiden verlaufen. Eine Ablesung an diesem Nomogramm geschieht daher wie folgt:

Ist  $u + i v = am(x + i y, k^2)$  zu bestimmen, so legt man durch die Skalenpunkte  $x$  und  $y$  und den gemeinsamen Doppelpunkt den Ablesekreis und schneidet ihn mit den Skalen für  $u$  und  $v$ . Der Vorzug dieses Nomogramms liegt darin, daß alle Skalen für alle Werte  $-\infty < k^2 < +\infty$  gänzlich im Endlichen verlaufen<sup>10)</sup>. Den Eckpunkten des Polardreiecks entsprechen drei Punkte  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$ , seinen Seiten drei Kreise durch je zwei der drei Punkte und den gemeinsamen Doppelpunkt aller Skalenträger (in Bild 7 nicht eingezeichnet). Diese Kreise sind der geometrische Ort aller Skalenpunkte mit den Argumentwerten  $K/2$  bzw.  $K'/2$ .

In analoger Weise gewinnt man aus dem symmetrischen Nomogramm mit zwei reellen Grundpunkten (Bild 3) durch die Transformation (4,1) ein Nomogramm mit einem *Büschel von Lemniskaten* als Träger der  $x$ - und der  $y$ -Skalen (Bild 8). Alle Kurven des Büschels haben einen gemeinsamen Doppelpunkt und zwei weitere reelle Grundpunkte, die transformierten Grund-

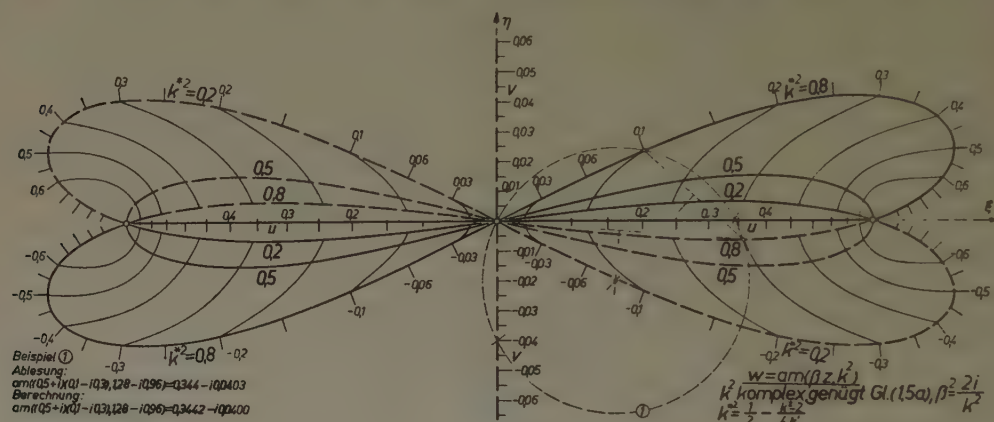


Bild 8

punkte  $P_1, P_2$ . Außerdem geht jede Kurve des Büschels je einmal durch die absoluten Kreispunkte und durch die beiden Punkte, die aus den konjugiert komplexen Punkten  $P_3, P_4$  durch die Transformation (4,1) hervorgehen. Die Gleichung dieses Kurvenbüschels, bezogen auf das in (2,25) verwendete  $\xi_1 \eta_1$ -Koordinatensystem, lautet mit dem Büschelparameter  $\lambda$ :

$$(\xi_1^2 + \eta_1^2)^2 - c_1^2 R^4 \xi_1^2 + c_2^2 R^4 \eta_1^2 + 3 c_1 c_2 R^4 \lambda \xi_1 \eta_1 = 0 \quad \dots \quad (4,3).$$

Der reelle zerfallende Kegelschnitt des Büschels (2,25), der die Skalen für  $u$  und  $v$  trägt, bleibt auch nach der Transformation ein orthogonales Geradenpaar. Die  $u$ -Skala erfüllt die Strecke zwischen den transformierten Grundpunkten. Die Beschriftung der  $v$ -Skala beginnt im Halbierungspunkt dieser Strecke. Die Ablesegeraden werden wiederum zu Kreisen durch den gemeinsamen Doppelpunkt der Skalenträger für  $x$  und  $y$ .

### Literatur

- [1] F. REUTTER, ZAMM 40 (1960), S. 75—93 (S. a. ZAMM 36 (1956), S. 258—280 und ZAMM 37 (1957), S. 260—261.)
- [2] H. SCHWERDT, Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik, Berlin 1931, S. 124 ff.
- [3] H. RYBNER, General Electric Review 33 (1930), S. 164—178.
- [4] F. ZIMMERMANN, Archiv für Elektrotechnik 32 (1938), S. 789—798.
- [5] I. A. VILNER, Doklady de l'Acad. d. Sciences, URSS LIII (1946) und Math. Sbornik 27 (1950), S. 3—46.

Manuskripteingang: 24. 7. 1959

Anschrift: Prof. Dr. F. REUTTER, Math. Inst. der TH Aachen, Lehrstuhl B, Aachen, Templergraben 55

<sup>10)</sup> Wegen seiner Entstehung aus dem Hyperbelnomogramm Bild 6 kommen Bild 7 dieselben Symmetrieeigenschaften wie Bild 6 zu.



# Neue genauere Runge-Kutta-Formeln für Differentialgleichungen $n$ -ter Ordnung

VON ERWIN FEHLBERG

Durch  $m$ -malige Differentiation und Transformation der Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung können Runge-Kutta-Formeln für die transformierte Differentialgleichung angegeben werden, die sowohl für die Lösungsfunktion als auch für deren Ableitungen noch die Glieder mit  $h^{m+5}$  der Taylor-Reihe genau erfassen.

Diese neuen und genaueren Runge-Kutta-Formeln erlauben eine Reduktion der Rechenzeit (auf einer elektronischen Rechenmaschine), da man die Integrationsschrittweite wesentlich vergrößern kann. Einige Beispiele werden gebracht, in denen die gleiche Genauigkeit wie beim üblichen Runge-Kutta-Verfahren mit unseren Formeln in 10% und weniger der Runge-Kutta-Rechenzeit erzielt wird (für  $m = 2, 3, 4$ ).

By an  $m$ -fold differentiation and suitable transformation of an  $n$ -th order differential equation, Runge-Kutta-formulas for the transformed differential equation can be obtained which correctly represent the  $h^{m+5}$  terms inclusively in the Taylor series for the solution as well as for its derivatives.

These new and more accurate Runge-Kutta formulas can be used to reduce computing time (on an electronic computer) by considerably increasing the step size of integration. Some examples are presented for which our formulas yield the same accuracy as the standard Runge-Kutta-formulas in about 10 percent and less of the computing time (for  $m = 2, 3, 4$ ).

При помощи  $m$ -кратного дифференцирования и преобразования дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка могут быть получены формулы Рунге-Кутты для преобразованного дифференциального уравнения, учитывающие точно как для самой функции решения так и для её производных еще члены ряда Тейлора, содержащие  $h^{m+5}$ .

Эти новые более точные формулы Рунге-Кутты допускают сокращение времени вычисления на электронной вычислительной машине, так как шаги интегрирования могут быть выбраны значительно большими. Даются некоторые примеры, в которых достигается та же точность, как и при применении обычного метода Рунге-Кутты, но за срок времени, составляющий 10% или меньше времени, расходуемого при употреблении обычного приема (для  $m = 2, 3, 4$ ).

## 1. Einleitung

In einer früheren Arbeit<sup>1)</sup> hat der Verfasser gezeigt, wie man durch eine  $m$ -malige Differentiation und Transformation einer Differentialgleichung 2-ter Ordnung RUNGE-KUTTA-Formeln gewinnen kann, die sowohl für die Lösung  $y$  als auch für deren erste Ableitung  $y'$  noch die Glieder mit  $h^{m+5}$  der TAYLOR-Reihe genau erfassen.

In dieser Arbeit sollen ähnliche RUNGE-KUTTA Formeln für die Differentialgleichung  $n$ -ter Ordnung hergeleitet werden, die wieder bis zu den Gliedern  $h^{m+5}$  einschließlich der TAYLOR-Reihen für  $y, y', \dots, y^{(n-1)}$  genau sind.

## 2. Die Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten der Runge-Kutta-Formeln für die Differentialgleichung $n$ -ter Ordnung und ihre Auflösung

Wir fassen uns hier kurz und verweisen auf die oben zitierte Arbeit<sup>1)</sup>, die bereits den Grundgedanken unserer Integrationsmethode (Transformation der Differentialgleichung zwecks Beseitigung möglichst vieler Anfangsglieder der TAYLOR-Reihe der Lösung) am Beispiel  $n = 2$  erläutert.

Vorgegebene Differentialgleichung:

$$\bar{y}^{(n)} = \bar{f}(x, \bar{y}, \bar{y}', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) \quad (1).$$

Vorgegebene Anfangswerte:

$$x = x_0; \quad \bar{y} = \bar{y}_0, \quad \bar{y}' = \bar{y}'_0, \quad \dots, \quad \bar{y}^{(n-1)} = \bar{y}^{(n-1)}_0 \quad (2).$$

Transformation:

$$\bar{y} = y + \sum_{i=1}^{m+n} \frac{1}{i!} \bar{y}^{(i)}_0 \cdot (x - x_0)^i + \frac{1}{n} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_0 (x - x_0) (y - \bar{y}_0) \quad (3).$$

Transformierte Differentialgleichung:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = \frac{1}{1 + \frac{1}{n} \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_0 \cdot (x - x_0)} \left\{ \bar{f} - \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} \bar{y}^{(i+n)}_0 \cdot (x - x_0)^i - \left( \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{y}^{(n-1)}} \right)_0 y^{(n-1)} \right\} \quad (4).$$

<sup>1)</sup> ZAMM 40 (1960), S. 252—259.



Anfangswerte der transformierten Differentialgleichung:

$$x = x_0: \quad y_0 = \bar{y}_0, \quad y'_0 = y''_0 = \dots = y^{(m+n)}_0 = 0, \quad \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}} \right)_0 = 0 \quad \dots \quad (5).$$

TAYLOR-Entwicklung für die transformierte Differentialgleichung:

$$y^{(n)} = \frac{1}{(m+1)!} y^{(m+n+1)}_0 \cdot h^{m+1} + \frac{1}{(m+2)!} y^{(m+n+2)}_0 \cdot h^{m+2} + \frac{1}{(m+3)!} y^{(m+n+3)}_0 \cdot h^{m+3} \\ + \frac{1}{(m+4)!} y^{(m+n+4)}_0 \cdot h^{m+4} + \dots \quad (6).$$

mit<sup>2)</sup>:

$$\left. \begin{aligned} y^{(m+n+1)}_0 &= \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0, \\ y^{(m+n+2)}_0 &= \left( \frac{\partial^{m+2} f}{\partial x^{m+2}} \right)_0, \\ y^{(m+n+3)}_0 &= \left( \frac{\partial^{m+3} f}{\partial x^{m+3}} \right)_0 + \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0 \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} \right)_0 + (m+3) \cdot \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0 \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^{(n-1)}} \right)_0, \\ y^{(m+n+4)}_0 &= \left( \frac{\partial^{m+4} f}{\partial x^{m+4}} \right)_0 + \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0 \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(n-3)}} \right)_0 + \left( \frac{\partial^{m+2} f}{\partial x^{m+2}} \right)_0 \cdot \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(n-2)}} \right)_0 \\ &\quad + (m+4) \cdot \left( \frac{\partial^{m+2} f}{\partial x^{m+2}} \right)_0 \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^{(n-1)}} \right)_0 + (m+4) \cdot \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0 \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^{(n-2)}} \right)_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot (m+3) \cdot (m+4) \cdot \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0 \cdot \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y^{(n-1)}} \right)_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{(m+3)(m+4)}{(m+2)!} \cdot \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial (y^{(n-1)})^2} \right)_0 \end{aligned} \right\} \quad (7).$$

Durch  $(n - \nu)$ -fache Integration folgt aus (6) für die  $\nu$ -te Ableitung von  $y$ :

$$y^{(\nu)} - y^{(\nu)}_0 = \frac{1}{(m+n+1-\nu)!} \cdot y^{(m+n+1)}_0 \cdot h^{m+n+1-\nu} + \dots + \frac{1}{(m+5)!} \cdot y^{(m+5+\nu)}_0 \cdot h^{m-5} + \dots \quad (8)$$

$(\nu = 0, 1, \dots, n-1)$

RUNGE-KUTTA-Ansatz für die Lösung der transformierten Differentialgleichung:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= f(x_0 + \alpha_1 \cdot h, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0) \cdot \frac{h^n}{n!}, \\ k_2 &= f\left(x_0 + \alpha_2 \cdot h, y_0 + \beta_0 k_1, y'_0 + \beta_1 \cdot \frac{k_1}{h}, \dots, y^{(n-1)}_0 + \beta_{n-1} \cdot \frac{k_1}{h^{n-1}}\right) \cdot \frac{h^n}{n!}, \\ k_3 &= f\left(x_0 + \alpha_3 \cdot h, y_0 + \gamma_0 k_1 + \delta_0 k_2, y'_0 + \gamma_1 \cdot \frac{k_1}{h} + \delta_1 \cdot \frac{k_2}{h}, \dots \right. \\ &\quad \left. \dots, y^{(n-1)}_0 + \gamma_{n-1} \cdot \frac{k_1}{h^{n-1}} + \delta_{n-1} \cdot \frac{k_2}{h^{n-1}}\right) \cdot \frac{h^n}{n!} \end{aligned} \right\} \quad (9),$$

$$k^{(\nu)} = y^{(\nu)} - y^{(\nu)}_0 = \frac{1}{h^\nu} (c^{(\nu)}_1 k_1 + c^{(\nu)}_2 k_2 + c^{(\nu)}_3 k_3) \quad (\nu = 0, 1, \dots, n-1) \quad (10).$$

<sup>2)</sup> Die eingerahmten Glieder in (7), (11) und (12) treten nur im Falle  $m = 0$  auf.



TAYLOR-Entwicklung des RUNGE-KUTTA-Ansatzes (9) ergibt:

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \frac{h^n}{n!} \left\{ \frac{1}{(m+1)!} \cdot \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0 \cdot \alpha_1^{m+1} \cdot h^{m+1} + \frac{1}{(m+2)!} \cdot \left( \frac{\partial^{m+2} f}{\partial x^{m+2}} \right)_0 \cdot \alpha_1^{m+2} \cdot h^{m+2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(m+3)!} \cdot \left( \frac{\partial^{m+3} f}{\partial x^{m+3}} \right)_0 \cdot \alpha_1^{m+3} \cdot h^{m+3} + \frac{1}{(m+4)!} \cdot \left( \frac{\partial^{m+4} f}{\partial x^{m+4}} \right)_0 \cdot \alpha_1^{m+4} \cdot h^{m+4} + \dots \right\}, \\
 k_2 &= \frac{h^n}{n!} \left\{ \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(m+1)!} \cdot \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0 \cdot \sum_{\mu}^{n-2} \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(\mu)}} \right)_0 \cdot \beta_{\mu} \alpha_1^{m+1} \cdot h^{m+n+1-\mu} \right. \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(m+2)!} \cdot \left( \frac{\partial^{m+2} f}{\partial x^{m+2}} \right)_0 \cdot \sum_{\mu}^{n-2} \left( \frac{\partial f}{\partial y^{(\mu)}} \right)_0 \cdot \beta_{\mu} \alpha_1^{m+2} \cdot h^{m+n+2-\mu} \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(m+1)!} \cdot \alpha_2 \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0 \cdot \sum_{\mu}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^{(\mu)}} \right)_0 \cdot \beta_{\mu} \alpha_1^{m+1} \cdot h^{m+n+1-\mu} \\
 &\quad + \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(m+2)!} \cdot \alpha_2 \left( \frac{\partial^{m+2} f}{\partial x^{m+2}} \right)_0 \cdot \sum_{\mu}^{n-1} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y^{(\mu)}} \right)_0 \cdot \beta_{\mu} \alpha_1^{m+2} \cdot h^{m+n+3-\mu} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n!^2} \cdot \frac{1}{(m+1)!^2} \cdot \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial (y^{(n-1)})^2} \right)_0 \cdot (\beta_{n-1} \alpha_1^{m+1})^2 \cdot h^{2m+4} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{(m+1)!} \cdot \alpha_2^2 \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0 \cdot \sum_{\mu}^{n-1} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y^{(\mu)}} \right)_0 \cdot \beta_{\mu} \alpha_1^{m+1} \cdot h^{m+n+3-\mu} \\
 &\quad + \frac{1}{(m+1)!} \cdot \left( \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} \right)_0 \cdot \alpha_2^{m+1} \cdot h^{m+1} + \frac{1}{(m+2)!} \cdot \left( \frac{\partial^{m+2} f}{\partial x^{m+2}} \right)_0 \cdot \alpha_2^{m+2} \cdot h^{m+2} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{(m+3)!} \cdot \left( \frac{\partial^{m+3} f}{\partial x^{m+3}} \right)_0 \cdot \alpha_2^{m+3} \cdot h^{m+3} + \frac{1}{(m+4)!} \cdot \left( \frac{\partial^{m+4} f}{\partial x^{m+4}} \right)_0 \cdot \alpha_2^{m+4} \cdot h^{m+4} + \dots \right\} \quad (11)
 \end{aligned}$$

und einen entsprechenden Ausdruck für  $k_3$ , der aus  $k_2$  hervorgeht, indem man  $\alpha_2$  durch  $\alpha_3$  und  $\beta_i \alpha_1^k$  durch  $\gamma_i \alpha_1^k + \delta_i \alpha_2^k$  ersetzt.

Koeffizientenvergleich der TAYLOR-Reihen für (10) und (8) für die Glieder bis  $h^{m+n+4-\nu}$  einschließlich ergibt die folgenden Bedingungsgleichungen für die Koeffizienten des RUNGE-KUTTA-Ansatzes:

$$\begin{aligned}
 h^{m+n+1-\nu} &: c_1^{(\nu)} \alpha_1^{m+1} + c_2^{(\nu)} \alpha_2^{m+1} + c_3^{(\nu)} \alpha_3^{m+1} = n! (m+1)! / (m+n+1-\nu)! \\
 h^{m+n+2-\nu} &: c_1^{(\nu)} \alpha_1^{m+2} + c_2^{(\nu)} \alpha_2^{m+2} + c_3^{(\nu)} \alpha_3^{m+2} = n! (m+2)! / (m+n+2-\nu)! \\
 h^{m+n+3-\nu} &: c_1^{(\nu)} \alpha_1^{m+3} + c_2^{(\nu)} \alpha_2^{m+3} + c_3^{(\nu)} \alpha_3^{m+3} = n! (m+3)! / (m+n+3-\nu)! \\
 h^{m+n+4-\nu} &: c_1^{(\nu)} \alpha_1^{m+4} + c_2^{(\nu)} \alpha_2^{m+4} + c_3^{(\nu)} \alpha_3^{m+4} = n! (m+4)! / (m+n+4-\nu)! \\
 h^{m+n+3-\nu} &: c_2^{(\nu)} \alpha_2 \beta_{n-1} \alpha_1^{m+1} + c_3^{(\nu)} \alpha_3 (\gamma_{n-1} \alpha_1^{m+1} + \delta_{n-1} \alpha_2^{m+1}) \\
 &\quad = n!^2 (m+1)! (m+3)! / (m+n+3-\nu)! \\
 h^{m+n+4-\nu} &: c_2^{(\nu)} \alpha_2 \beta_{n-1} \alpha_1^{m+2} + c_3^{(\nu)} \alpha_3 (\gamma_{n-1} \alpha_1^{m+2} + \delta_{n-1} \alpha_2^{m+2}) \\
 &\quad = n!^2 (m+2)! (m+4)! / (m+n+4-\nu)! \\
 h^{m+n+4-\nu} &: c_2^{(\nu)} \alpha_2^2 \beta_{n-1} \alpha_1^{m+1} + c_3^{(\nu)} \alpha_3^2 (\gamma_{n-1} \alpha_1^{m+1} + \delta_{n-1} \alpha_2^{m+1}) \\
 &\quad = n!^2 (m+1)! (m+3)! (m+4)! / (m+n+4-\nu)! \quad (12) \\
 h^{m+n+3-\nu} &: c_2^{(\nu)} \beta_{n-2} \alpha_1^{m+1} + c_3^{(\nu)} (\gamma_{n-2} \alpha_1^{m+1} + \delta_{n-2} \alpha_2^{m+1}) = n!^2 (m+1)! / (m+n+3-\nu)! \\
 h^{m+n+4-\nu} &: c_2^{(\nu)} \beta_{n-2} \alpha_1^{m+2} + c_3^{(\nu)} (\gamma_{n-2} \alpha_1^{m+2} + \delta_{n-2} \alpha_2^{m+2}) = n!^2 (m+2)! / (m+n+4-\nu)! \\
 h^{m+n+4-\nu} &: c_2^{(\nu)} \alpha_2 \beta_{n-2} \alpha_1^{m+1} + c_3^{(\nu)} \alpha_3 (\gamma_{n-2} \alpha_1^{m+1} + \delta_{n-2} \alpha_2^{m+1}) \\
 &\quad = n!^2 (m+1)! (m+4)! / (m+n+4-\nu)! \\
 h^{m+n+4-\nu} &: c_2^{(\nu)} \beta_{n-3} \alpha_1^{m+1} + c_3^{(\nu)} (\gamma_{n-3} \alpha_1^{m+1} + \delta_{n-3} \alpha_2^{m+1}) = n!^2 (m+1)! / (m+n+4-\nu)! \\
 h^5 &: c_2^{(\nu)} \beta_{n-1}^2 \alpha_1^2 + c_3^{(\nu)} (\gamma_{n-1} \alpha_1 + \delta_{n-1} \alpha_2)^2 = 6 \cdot n!^3 / 5!
 \end{aligned}$$

Links in (12) ist die  $h$ -Potenz der Glieder angegeben, auf die sich der Koeffizientenvergleich bezieht.

Für das Folgende setzen wir voraus, daß die  $\alpha_\nu$  ( $\nu = 1, 2, 3$ ) von Null und voneinander verschieden sind.

Um die Gleichungen (12) bis zur Potenz  $h^{m+5}$  einschließlich befriedigen zu können, muß dann für  $\nu = n - 1$  die aus der ersten Formelgruppe (12) sich ergebende Verträglichkeitsbedingung:

$$\frac{1}{m+2} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \frac{1}{m+3} (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3) + \frac{1}{m+4} (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \frac{1}{m+5} = 0 \quad (13)$$

bestehen.

Für die zweite und dritte Formelgruppe (12) muß ebenfalls je eine Verträglichkeitsbedingung bestehen, denn setzt man in diese Formelgruppen  $\nu = n - 1$  und  $\nu = n - 2$  ein, so erhält man vier Gleichungen für die drei Unbekannten  $\beta_{n-1}, \gamma_{n-1}, \delta_{n-1}$  bzw.  $\beta_{n-2}, \gamma_{n-2}, \delta_{n-2}$ .

Wie im Falle  $n = 2$  in der oben zitierten Arbeit<sup>1)</sup> gezeigt, sind diese letzteren Verträglichkeitsbedingungen mit (13) identisch. Dieser Nachweis läßt sich jedoch ganz analog für beliebiges  $n$  erbringen, so daß auch für beliebiges  $n$  die Gleichung (13) die einzige einschränkende Bedingungsgleichung ist, der unsere Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  genügen müssen, wenn (12) lösbar sein soll.

Auch unsere Ausführungen für  $m = 0$  in der oben zitierten Arbeit<sup>1)</sup> lassen sich auf beliebiges  $n$  übertragen und führen, falls die Differentialgleichung (1) nicht linear in bezug auf  $\bar{y}^{(n-1)}$  ist, wieder auf die  $\alpha$ -Werte:

$$\alpha_1 = \text{beliebig}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{5} - \frac{1}{10} \sqrt{6}, \quad \alpha_3 = \frac{3}{5} + \frac{1}{10} \sqrt{6} \quad \dots \quad (14)$$

Eine elementare Rechnung liefert dann aus (12) die gesuchten RUNGE-KUTTA-Koeffizienten.

### 3. Die Runge-Kutta-Koeffizienten für $n = 1, 2, 3, 4$ und $m = 0, 1, 2, 3, 4$

In den folgenden Tabellen geben wir für Differentialgleichungen erster bis vierter Ordnung für  $m = 0, 1, 2, 3, 4$  RUNGE-KUTTA-Koeffizienten an, die die Gleichungen (12) erfüllen.

Da die einschränkende Bedingungsgleichung (13) von  $n$  unabhängig ist, können wir für alle  $n$  die gleichen Koeffizienten  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  wählen:

Tabelle 0.  $n$  beliebig

	$m = 0$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$\alpha_1$	1/3	3/5	2/5	3/7	1/2	1/3
$\alpha_2$	4/5	$\frac{3}{5} - \frac{1}{10} \sqrt{6}$	4/5	4/5	5/6	4/5
$\alpha_3$	1	$\frac{3}{5} + \frac{1}{10} \sqrt{6}$	1	1	1	1

Hier wie in den folgenden Tabellen bezieht sich die erste Spalte  $m = 0$  auf in  $\bar{y}^{(n-1)}$  lineare Differentialgleichungen (1), die zweite Spalte  $m = 0$  und sämtliche Spalten  $m > 0$  gelten allgemein. Da die  $\alpha_\nu$  durch (12) nicht eindeutig festgelegt sind, haben wir für Tabelle 0 numerisch möglichst bequeme Werte ausgewählt.

In den folgenden Tabellen 1 bis 4 sind die restlichen RUNGE-KUTTA-Koeffizienten für  $n = 1, 2, 3, 4$  angegeben. Dort nicht aufgeführte Koeffizienten sind für alle angegebenen  $m$  als Null anzunehmen. Denn da auch diese restlichen Koeffizienten nicht alle eindeutig bestimmt sind, können wir zur Vereinfachung unserer Formeln (9) noch einige dieser Koeffizienten Null setzen.

Tabelle 1.  $n = 1$

	$m = 0$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$\beta_0$	63/50	$\frac{1}{20} (7 - 2\sqrt{6})$	4/3	5096/3375	125/81	169344/15625
$\gamma_0$	-27/7	5/12	-95/32	-1295/351	-21/5	-297/7
$\delta_0$	45/28	$\frac{1}{75} (3 + 8\sqrt{6})$	135/128	5625/5824	2673/3125	140625/136192
$c_1$	27/56	0	125/288	16807/42120	8/21	729/784
$c_2$	125/336	$\frac{1}{36} (16 + \sqrt{6})$	125/384	3125/9984	5832/21875	390625/1204224
$c_3$	1/24	$\frac{1}{36} (16 - \sqrt{6})$	1/18	7/120	1/21	19/336

Tabelle 2.  $n = 2$

siehe Tabelle 1 der oben zitierten Arbeit<sup>1)</sup>



Tabelle 3.  $n = 3$ 

	$m = 0$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$\beta_1$	252/125	$\frac{1}{100}(54 - 19\sqrt{6})$	8/5	40768/28125	625/486	580608/78125
$\beta_2$	189/25	$\frac{3}{10}(7 - 2\sqrt{6})$	8	10192/1125	250/27	1016064/15625
$\gamma_1$	-18/7	$\frac{1}{100}(42 - 13\sqrt{6})$	-15/16	-14/13	-6/5	-2754/133
$\gamma_2$	-162/7	5/2	-285/16	-2590/117	-126/5	-1782/7
$\delta_0$	3/2	$\frac{3}{625}(51 + 11\sqrt{6})$	15/32	375/1568	486/3125	3125/29184
$\delta_1$	15/14	$\frac{3}{125}(22 + 17\sqrt{6})$	45/64	1875/2912	1458/3125	46875/68096
$\delta_2$	135/14	$\frac{2}{25}(3 + 8\sqrt{6})$	405/64	16875/2912	16038/3125	421875/68096
$c_1$	9/14	$\frac{5}{36}(3 - \sqrt{6})$	15/32	686/1755	2/7	243/196
$c_2$	5/112	$\frac{1}{6}(1 + \sqrt{6})$	5/128	125/3328	486/21875	15625/401408
$c'_1$	27/14	0	25/16	2401/1755	8/7	729/196
$c'_2$	25/56	$\frac{1}{6}(7 + 2\sqrt{6})$	25/64	625/1664	5832/21875	78125/200704
$c'_3$	0	$\frac{1}{6}(7 - 2\sqrt{6})$	0	0	0	0
$c''_1$	81/28	0	125/48	16807/7020	16/7	2187/392
$c''_2$	125/56	$\frac{1}{6}(16 + \sqrt{6})$	125/64	3125/1664	34992/21875	390625/200704
$c''_3$	1/4	$\frac{1}{6}(16 - \sqrt{6})$	1/3	7/20	2/7	19/56

Tabelle 4.  $n = 4^3$ 

	$m = 0$	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$
$\beta_2$	1008/125	$\frac{1}{25}(54 - 19\sqrt{6})$	32/5	163072/28125	1250/243	2322432/78125
$\beta_3$	756/25	$\frac{6}{5}(7 - 2\sqrt{6})$	32	40768/1125	1000/27	4064256/15625
$\gamma_2$	-72/7	$\frac{1}{25}(42 - 13\sqrt{6})$	-15/4	-56/13	-24/5	-11016/133
$\gamma_3$	-648/7	10	-285/4	-10360/117	-504/5	-7128/7
$\delta_1$	6	$\frac{12}{625}(51 + 11\sqrt{6})$	15/8	375/392	1944/3125	3125/7296
$\delta_2$	30/7	$\frac{12}{125}(22 + 17\sqrt{6})$	45/16	1875/728	5832/3125	46875/17024
$\delta_3$	270/7	$\frac{8}{25}(3 + 8\sqrt{6})$	405/16	16875/728	64125/3125	421875/17024
$c_1$	3/5	$\frac{1}{27}(9 - 4\sqrt{6})$	65/168	343/1170	4/21	81/98
$c_2$	0	$\frac{8}{45}(1 + \sqrt{6})$	5/672	125/11648	108/21875	3125/225792
$c'_1$	18/7	$\frac{5}{9}(3 - \sqrt{6})$	15/8	2744/1755	8/7	243/49
$c'_2$	5/28	$\frac{2}{3}(1 + \sqrt{6})$	5/32	125/832	1944/21875	15625/100352
$c'_3$	54/7	0	25/4	9604/1755	32/7	729/49
$c''_2$	25/14	$\frac{2}{3}(7 + 2\sqrt{6})$	25/16	625/416	23328/21875	78125/50176
$c''_3$	0	$\frac{2}{3}(7 - 2\sqrt{6})$	0	0	0	0
$c'''_1$	81/7	0	125/12	16807/1755	64/7	2187/98
$c'''_2$	125/14	$\frac{2}{3}(16 + \sqrt{6})$	125/16	3125/416	139968/21875	390625/50176
$c'''_3$	1	$\frac{2}{3}(16 - \sqrt{6})$	4/3	7/5	8/7	19/14

<sup>3)</sup> Fußnote 3 siehe Seite 454.

## 4. Beispiele

Um zu zeigen, daß unsere Integrationsmethode nicht nur theoretisch von großer Genauigkeit ist, sondern auch praktisch mit Vorteil zur numerischen Lösung von (analytischen) Differentialgleichungen verwendet werden kann, bringen wir im folgenden einige Beispiele<sup>4)</sup>.

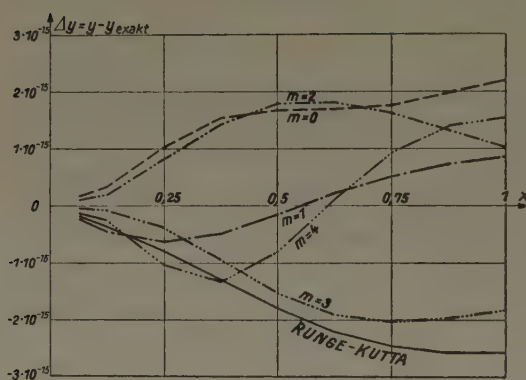
Wir möchten bemerken, daß die Vorteile unserer Methode besonders deutlich werden, wenn eine sehr hohe Genauigkeitsforderung an die Integration gestellt wird. Denn die dann bei dem Standard-RUNGE-KUTTA-Verfahren erforderliche sehr kleine Schrittweite macht die Rechnung wegen der Anhäufung der Abrundungsfehler ungenau und außerdem sehr langwierig. Indem wir bei unserer Methode wesentlich höhere  $h$ -Potenzen der TAYLOR-Entwicklung der Lösung und ihrer Ableitungen miteinfassen, können wir eine erheblich größere Schrittweite als das Standard-RUNGE-KUTTA-Verfahren verwenden und benötigen dadurch für die gleiche Genauigkeit z. B. auf einer automatischen elektronischen Rechenanlage eine wesentlich kürzere Rechenzeit. Unsere Beispiele sollen einen Eindruck vermitteln, was unsere Methode in dieser Hinsicht zu leisten vermag<sup>5)</sup>.

## Beispiel 1

Differentialgleichung:  $y' = \cos^2 y$

Anfangswerte:  $x = 0, y = 0$

Exakte Lösung:  $y = \arctg x$



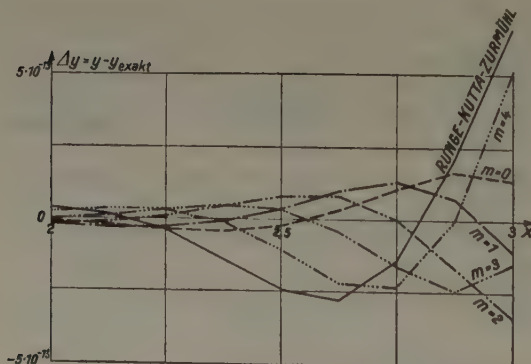
	$h$	Zahl von Integrations-schritten	Rechenzeit	
			absolut sec.	prozentual %
RUNGE-KUTTA	1/1200	1200	1900	100
Transf. Methode: $m = 0$	1/320	320	701	36.9
$m = 1$	1/88	88	210	11.1
$m = 2$	1/40	40	103	5.4
$m = 3$	1/24	24	65	3.6
$m = 4$	1/16	16	51	2.7

## Beispiel 2

Differentialgleichung:  $y''' = -4x^2 y' - 12xy$

Anfangswerte:  $x = 0, y = 0, y' = 0, y'' = 2$

Exakte Lösung:  $y = \sin(x^2)$



	$h$	Zahl von Integrations-schritten	Rechenzeit	
			absolut sec.	prozentual %
RUNGE-KUTTA-ZURMÜHL	1/2000	6000	1879	100
Transf. Methode: $m = 0$	1/480	1440	842	44.8
$m = 1$	1/160	480	397	21.1
$m = 2$	1/72	216	243	12.9
$m = 3$	1/40	120	170	9.0
$m = 4$	1/24	72	127	6.8

<sup>3)</sup> Die RUNGE-KUTTA-Koeffizienten dieser Tabelle liefern  $y$  sogar bis  $h^{m+6}$  einschließlich genau. Bezüglich des beschränkten Wertes dieser Genauigkeitssteigerung für  $y$  allein vergleiche man jedoch unsere Ausführungen unter Nr. 4.

<sup>4)</sup> Ein Beispiel für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung findet sich in der oben zitierten Arbeit<sup>1)</sup>.

<sup>5)</sup> Die Beispiele wurden auf einer IBM-704-Maschine unter Verwendung einer vom National Bureau of Standards, Washington, D. C. entwickelten 20-dezimaligen interpretativen Routine berechnet.



Natürlich kann man unsere Methode auch umgekehrt dazu benutzen, eine Rechengenauigkeit zu erzielen, die beim Standard-RUNGE-KUTTA-Verfahren selbst bei Verwendung extrem kleiner Schrittweite, d. h. extrem langer Rechenzeit nicht mehr möglich ist.

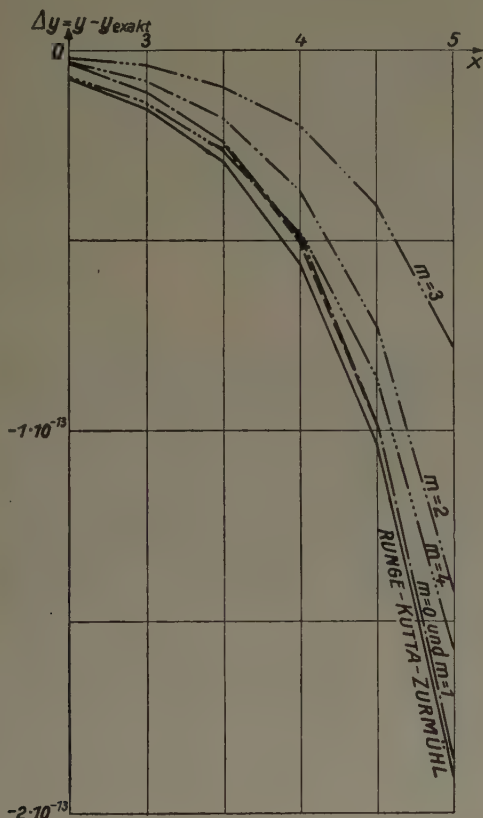
Wir möchten noch auf einen weiteren Umstand aufmerksam machen. Unsere Methode liefert die Ableitungen unserer Lösung mit der gleichen Genauigkeit wie die Lösung selbst. Dies erscheint uns wesentlich, da eine weniger genaue Ableitung der Lösung auf dem Wege über die Differentialgleichung auch die Genauigkeit der Lösung selbst für den nächsten und die folgenden Schritte ungünstig beeinflussen muß. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auf Beispiele 2 und 3. Die dortige Überlegenheit unserer Methode auch für  $m = 0$  verglichen mit R. ZURMÜHL<sup>6)</sup> Formeln erklärt sich aus der größeren Genauigkeit unserer Ableitungen  $y'$  und  $y''$  bzw.  $y''$  und  $y'''$ .

### Beispiel 3

Differentialgleichung:  $y'''' = y$

Anfangswerte:  $x = 0, y = 1, y' = 1, y'' = 1, y''' = 1$

Exakte Lösung:  $y = e^x$



	h	Zahl von Integrations-schritten	Rechenzeit	
			absolut sec.	prozentual %
RUNGE-KUTTA-ZURMÜHL	1/1000	5000	1450	100
Transf. Methode: $m = 0$	1/252	1260	688	47.4
$m = 1$	1/72	360	272	18.8
$m = 2$	1/30	150	154	10.6
$m = 3$	1/16	80	106	7.3
$m = 4$	1/12	60	97	6.7

Viele (idealisierte) Probleme z. B. der Himmelsmechanik sind für unsere Integrationsmethode zugänglich, und die dort erforderliche Genauigkeit hat mit zur Entwicklung unserer Methode geführt.

Manuskripteingang: 9. 10. 1959

Anschrift: Dr. E. FEHLBERG, 2113 Fairfax Street NE, Huntsville, Ala., USA

<sup>6)</sup> R. ZURMÜHL, ZAMM 28 (1948), S. 173—182.

# Zur Frage der Fehlerabschätzung beim Verfahren der harmonischen Balance

Von P. SAGIROW

Die harmonische Balance liefert uns für die Frequenz und Amplitude einer periodischen Lösung von (1) gewisse Werte  $\omega_h$  und  $a_h$ . Die Fehler, mit denen diese Näherungswerte behaftet sind, bleiben jedoch unbekannt.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren vorgeschlagen, das in sehr vielen Fällen eine sukzessive Abschätzung des Frequenzfehlers und eine anschließende Abschätzung des Amplitudenfehlers gestattet. Dabei wird festgestellt, daß im allgemeinen schon ein geringer Frequenzfehler einen großen Amplitudenfehler nach sich zieht.

Ein Beispiel wird durchgerechnet.

For the frequency and amplitude of a periodic solution of (1) the harmonic balance yields certain values  $\omega_h$  and  $a_h$ . The errors, however, of these approximate values remain unknown.

In the present paper a method is proposed which permits a successive estimation of the frequency error and a following estimation of the amplitude error for many cases. Here it is stated that in general a small frequency error already implies a large amplitude error.

An example is calculated.

Приближенные значения  $\omega_h$  и  $a_h$  частоты и амплитуды периодического решения уравнения (1) могут быть найдены методом гармонического баланса. Ошибка этих приближенных значений остается неизвестной.

В настоящей работе предлагается метод, позволяющий в целом ряде случаев путем последовательных приближений оценить ошибку по частоте, а затем и ошибку по амплитуде. Оказывается, что уже незначительная ошибка по частоте влечет за собой большую ошибку по амплитуде.

Рассматривается пример.

## 1. Einleitung

Zur Bestimmung periodischer Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen benutzt man in den Anwendungsgebieten oft das Verfahren der harmonischen Balance. Man geht dabei von der Annahme aus, daß die gegebene nichtlineare Differentialgleichung, z. B.

$$\frac{d^m x}{dt^m} + r_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + r_{m-1} \frac{dx}{dt} + r_m x = f(x) \quad (1)$$

eine periodische Lösung besitzt, die von einer Sinusschwingung wenig verschieden ist, setzt dementsprechend  $x = a \sin \omega t$  (mit zunächst unbekannten  $a$  und  $\omega$ ) und entwickelt die nichtlineare Funktion  $f(x) = f(a \sin \omega t)$  in eine FOURIER-Reihe. Für eine eindeutige und ungerade Funktion  $f(x)$  erhält man

$$f(x) = f(a \sin \omega t) = B_1 \sin \omega t + \dots, \quad B_1 = B_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin u) \sin u \, du.$$

Vernachlässigt man alle höheren Harmonischen der FOURIER-Entwicklung, so bleibt

$$f(x) = B_1 \sin \omega t = \frac{B_1}{a} \cdot x \quad (2).$$

Diesen Näherungswert setzt man nun in (1) für  $f(x)$  ein und erhält dadurch an Stelle der nichtlinearen Gleichung (1) die „harmonisch linearisierte“ Gleichung

$$\frac{d^m x}{dt^m} + r_1 \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + r_{m-1} \frac{dx}{dt} + \left( r_m - \frac{B_1(a)}{a} \right) x = 0 \quad (1').$$

Die Unbekannten  $a$  und  $\omega$  werden jetzt aus den Bedingungen gewonnen, denen die Koeffizienten von (1') genügen müssen, damit (1') eine periodische Lösung  $x = a \sin \omega t$  zuläßt. Nähere Angaben über dieses Verfahren findet man beispielsweise in [1], [2], [3], [5].

Dieses Verfahren führt bei Gleichungen beliebig hoher Ordnung und bei sehr verschiedenen Nichtlinearitäten relativ schnell zum Ziel, hat aber zwei wesentliche Mängel: 1. Die Annahme, daß (1) eine sinusähnliche periodische Lösung besitzt, ist recht willkürlich, 2. Ist eine periodische Lösung tatsächlich vorhanden, was z. B. aus Versuchsergebnissen bekannt sein kann, so liefert das beschriebene Verfahren zwar eine Näherung, gibt aber keinerlei Auskunft über den möglichen Fehler.



Die vorliegende Arbeit behandelt nur die zweite Frage. Unter gewissen Voraussetzungen wird gezeigt, daß falls (1) eine periodische Lösung (4) besitzt, die strengen Werte der Frequenz  $\omega$  und der Amplitude  $a$  der ersten Harmonischen dieser Lösung den Ungleichungen (22) bzw. (23) genügen, während die restliche Reihe

$$\sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t)$$

durch (17) abgeschätzt werden kann. Aus (22) folgt, daß der strenge  $\omega$ -Wert in einer gewissen Umgebung des Näherungswertes  $\omega_h$  der harmonischen Balance liegt, d. h. es wird eine Fehlerabschätzung  $\omega = \omega_h \pm \Delta \omega$  erzielt. Der Amplitudenfehler ergibt sich dann aus (23). Er ist im allgemeinen auch bei kleinem  $\omega$  recht groß. Die Anwendung des Verfahrens wird an einem Beispiel erläutert.

## 2. Bezeichnungen

Folgende Bezeichnungen werden benutzt:

$$L(D) \equiv r_0 D^m + r_1 D^{m-1} + \dots + r_{m-1} D + r_m, \quad D \equiv \frac{d}{dt},$$

$$L(n i \omega) = X(n \omega) + i Y(n \omega),$$

$$X(n \omega) \equiv X_n(\omega) \equiv X_n \equiv r_m - r_{m-2}(n \omega)^2 + r_{m-4}(n \omega)^4 - \dots,$$

$$Y(n \omega) \equiv Y_n(\omega) \equiv Y_n \equiv r_{m-1} n \omega - r_{m-3}(n \omega)^3 + \dots,$$

$$L_n = |L(n i \omega)|,$$

$$-\varphi_n = \arg L(n i \omega),$$

$$\sum_3 \equiv \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} (a_n \cos n u + b_n \sin n u), \quad u = \omega t.$$

## 3. Ansatz

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$L(D) x + f(x) = 0 \quad (3).$$

Die Funktion  $f(x)$  sei eindeutig, stetig und ungerade, ihre Ableitung sei beschränkt:  $f(-x) = -f(x)$ ;  $|f'(x)| \leq M$ . Der Grad von  $L(D)$  sei  $m \geq 3$ , die Koeffizienten von  $L(D)$  seien reell. Einige weitere Voraussetzungen werden im Laufe der Ausführungen getroffen.

In Erweiterung des Ansatzes  $x = a \sin \omega t$  der harmonischen Balance suchen wir die periodische Lösung von (3) in der Form

$$x(t) = a \sin \omega t + \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t) \quad (4).$$

Entwickelt man unter den gemachten Voraussetzungen die Funktion  $f(x) = f(x(t))$  in eine FOURIER-Reihe, so erhält man

$$f(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_n \cos n \omega t + B_n \sin n \omega t) \quad (5)$$

mit den Koeffizienten

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin u + \sum_3) \cos n u du; \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin u + \sum_3) \sin n u du \quad (6).$$

Das Einsetzen von (5) in (3) führt auf die lineare Differentialgleichung

$$L(D) x = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} (A_n \cos n \omega t + B_n \sin n \omega t) \quad (7)$$

mit der Lösung

$$x(t) = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{A_n \cos(n \omega t + \varphi_n) + B_n \sin(n \omega t + \varphi_n)}{L_n}$$

oder nach einer einfachen Umformung

$$x(t) = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[ \frac{A_n \cos \varphi_n + B_n \sin \varphi_n}{L_n} \cos n \omega t + \frac{-A_n \sin \varphi_n + B_n \cos \varphi_n}{L_n} \sin n \omega t \right] \quad (8).$$

Ein Koeffizientenvergleich von (4) und (8) gibt für die Bestimmung der Unbekannten  $a, \omega, a_n, b_n$  das unendliche transzendente System

$$\left. \begin{aligned} -\frac{A_1 \cos \varphi_1 + B_1 \sin \varphi_1}{L_1} &= 0, \\ -\frac{A_1 \sin \varphi_1 + B_1 \cos \varphi_1}{L_1} &= a, \\ -\frac{A_n \cos \varphi_n + B_n \sin \varphi_n}{L_n} &= a_n, \\ -\frac{A_n \sin \varphi_n + B_n \cos \varphi_n}{L_n} &= b_n, \end{aligned} \right\} \quad (n = 3, 5, 7, \dots) \quad (9).$$

#### 4. Abschätzung der Restreihe $\sum_3$

Wir wenden uns zunächst den beiden letzten Gleichungen von (9) zu und erhalten durch Quadrieren und Summieren

$$a_n^2 + b_n^2 = \frac{A_n^2 + B_n^2}{L_n^2} \quad (n = 3, 5, 7, \dots) \quad (10).$$

Für die Koeffizienten  $A_n$  und  $B_n$  der FOURIER-Reihe (5) gelten die Abschätzungen [4],

$$|A_n| \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{V_0^{2\pi} f(x(u))}{n}; \quad |B_n| \leq \frac{2}{\pi} \cdot \frac{V_0^{2\pi} f(x(u))}{n} \quad (11),$$

wo  $V_0^{2\pi} f(x(u))$  die Variation von  $f(x(u))$  auf dem Intervall  $[0, 2\pi]$  der  $u$ -Achse bezeichnet.

Definitionsgemäß ist

$$V_0^{2\pi} f(x(u)) = \sup \sum |f(x(u_{k+1})) - f(x(u_k))|, \quad u \in [0, 2\pi].$$

Benutzt man vorübergehend die Bezeichnung  $x(u_k) = x_k$ , so ist

$$|f(x(u_{k+1})) - f(x(u_k))| = |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq M |x_{k+1} - x_k| = M |x(u_{k+1}) - x(u_k)|$$

und deshalb

$$V_0^{2\pi} f(x(u)) \leq M \cdot \sup \sum |x(u_{k+1}) - x(u_k)| = M \cdot V_0^{2\pi} x(u) \quad (12).$$

Aus (4) erhalten wir aber:

$$\begin{aligned} V_0^{2\pi} x(u) &= V_0^{2\pi} \left( a \sin u + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} (a_n \cos n u + b_n \sin n u) \right) \leq V_0^{2\pi} a \sin u \\ &\quad + \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} V_0^{2\pi} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(n u + \psi_n) = 4 a + 4 \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} n \cdot \frac{\sqrt{A_n^2 + B_n^2}}{L_n} \\ &\leq 4 a + 4 \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}}{\pi \cdot L_n} \cdot V_0^{2\pi} f(x(u)). \end{aligned}$$

Setzt man das in (12) ein, so bekommt man die Ungleichung

$$V_0^{2\pi} f(x(u)) \leq 4 a M + \frac{8\sqrt{2} M}{\pi} \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{L_n} \cdot V_0^{2\pi} f(x(u)).$$

Unter der Voraussetzung

$$\frac{8\sqrt{2} M}{\pi} \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{L_n} = 3,62 M \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{L_n} < 1 \quad (13)$$

folgt hieraus

$$V_0^{2\pi} f(x(u)) \leq \frac{4 a M}{1 - 3,62 M \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{L_n}} \quad (14).$$

Für  $a_n^2 + b_n^2$  ergibt sich jetzt aus (10), (11) und (14) die Abschätzung

$$a_n^2 + b_n^2 \leq \frac{8}{\pi^2 n^2 L_n^2} \left( \frac{4 a M}{1 - 3,62 M \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{L_n}} \right)^2 \quad (15).$$



Diese Ungleichung gibt uns die Möglichkeit, die beim Verfahren der harmonischen Balance vernachlässigte Restreihe  $\sum_3$  in (4) abzuschätzen. Es ist

$$\left| \sum_3 \right| \leq \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \left| \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \right| \dots \dots \dots (16)$$

oder endgültig

$$\left| \sum_3 \right| \leq \frac{3,62 M a}{1 - 3,62 M \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} \frac{1}{L_n}} \cdot \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n L_n} \dots \dots \dots (17).$$

Diese Formel gilt nur unter der Voraussetzung (13).

## 5. Gleichungen zur Bestimmung von $\omega$ und $\alpha$

### Ungleichung zur Bestimmung von $\omega$

Wie kehren jetzt zu (9) zurück und betrachten die beiden ersten Gleichungen. Wir benutzen die Beziehungen  $\cos \varphi_1 = X_1/L_1$ ,  $\sin \varphi_1 = -Y_1/L_1$  und schreiben die Gleichungen (9) in der Form

$$\left. \begin{aligned} A_1 X_1 - B_1 Y_1 &= 0 \\ -A_1 Y_1 - B_1 X_1 &= a L_1^2 \end{aligned} \right\},$$

woraus nach einigen Umformungen folgt:

$$\left. \begin{aligned} a Y_1(\omega) &= -A_1 \\ a X_1(\omega) &= -B_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18).$$

Die linken Gleichungsseiten enthalten nur die Unbekannten  $\omega$  und  $a$ , die rechten Seiten hingegen sämtliche unbekannten Amplituden  $a$ ,  $a_n$ ,  $b_n$ .

Wir formen die Ausdrücke (6) für  $A_1$  und  $B_1$  um:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \left[ a \sin u + \sum_3 \right] \cos u \, du = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ f(a \sin u) + \sum_3 \cdot f' \left( a \sin u + \vartheta \sum_3 \right) \right] \cos u \, du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin u) \cos u \, du + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_3 \cdot f' \left( a \sin u + \vartheta \sum_3 \right) \cos u \, du \quad (|\vartheta| < 1). \end{aligned}$$

Das erste Integral verschwindet:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin u) \cos u \, du = 0,$$

das zweite Integral bezeichnen wir mit

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_3 \cdot f' \left( a \sin u + \vartheta \sum_3 \right) \cos u \, du$$

und erhalten

$$A_1 = \alpha_1.$$

In ähnlicher Weise bekommt man

$$B_1 = \bar{B}_1 + \beta_1,$$

wo

$$\bar{B}_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin u) \sin u \, du, \quad \beta_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_3 \cdot f' \left( a \sin u + \vartheta \sum_3 \right) \sin u \, du$$

ist.

Wir können also das System (18) durch folgendes System ersetzen

$$\left. \begin{aligned} a Y_1(\omega) &= -\alpha_1 \\ a X_1(\omega) &= -\bar{B}_1 - \beta_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19).$$

Im System (19) ist nichts vernachlässigt; würde man die Größen  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  kennen, könnte man aus (19) die genauen Werte von  $\omega$  und  $a$  ermitteln. Da jedoch  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  nicht bekannt sind, stößt man auf Schwierigkeiten. Um diese zu umgehen, werden bei der Anwendung der harmonischen Balance  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  einfach vernachlässigt und die Näherungswerte  $\omega_h$  und  $a_h$  aus dem System

$$\left. \begin{aligned} Y_1(\omega_h) &= 0 \\ a_h X_1(\omega_h) &= -\bar{B}_1(a_h) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

berechnet. Der dabei entstehende Fehler bleibt unbekannt.

Wir beschreiten einen anderen Weg, indem wir aus (19) zur Bestimmung der Frequenz eine Ungleichung gewinnen. Die Funktionen  $\alpha_1$  und  $\beta_1$  können leicht abgeschätzt werden:

$$|\alpha_1| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_3 \right| \cdot |f'| \cdot |\cos u| \cdot |du| \leq \frac{4}{\pi} M \max_3 \left| \sum_3 \right|.$$

Das Gleiche gilt für  $|\beta_1|$ . Benutzt man jetzt die Abschätzung (17), so erhält man

$$|\alpha_1|, |\beta_1| \leq \kappa a, \quad \kappa = \frac{4,64 M^2}{1 - 3,62 M \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{L_n}} \cdot \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n L_n} \dots \dots (21).$$

Damit bekommen wir aus (19) folgende Ungleichung, welcher der strenge Wert von  $\omega$  genügen muß:

$$|Y_1(\omega)| \leq \kappa \dots \dots \dots (22).$$

Diese Ungleichung gilt wiederum nur, wenn die Bedingung (13) erfüllt ist.

## 6. Abschätzung des Fehlers der harmonischen Balance

Bevor wir zum Hauptziel unserer Untersuchung schreiten und (22) zur Abschätzung des Frequenzfehlers der harmonischen Balance benutzen, wenden wir uns der Bedingung (13) zu, wobei wir im Hinblick auf das Weitere (13) durch die schärfere Forderung

$$3,62 M \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{L_n} < \lambda < 1 \dots \dots \dots (13')$$

ersetzen, wo  $\lambda$  so beschaffen sei, daß  $\kappa$  in (21) nicht übermäßig groß wird.

Die Bedingung (13') bedeutet, 1) daß die Funktionen  $f(x)$  mit senkrechten Tangenten ( $M = \infty$ ) auszuschließen sind ( $M$  braucht aber nicht unbedingt klein zu sein; siehe weiter unten das Beispiel, wo  $M = 3$  ist) und 2) daß  $\sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} (1/L_n)$  hinreichend klein sein muß.

Wir schließen den Sonderfall  $X(\omega) = Y(\omega) = 0$  aus. Dann ist  $1/|L(i\omega)|$  als Funktion von  $\omega$  betrachtet eine im Endlichen verlaufende Kurve, die von einer gewissen Stelle an monoton nach 0 abnimmt, so daß aus  $\omega_2 > \omega_1$  stets folgt  $1/|L(i\omega_2)| < 1/|L(i\omega_1)|$ . Die Reihe  $\sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} 1/L_n$  konvergiert für hinreichend große  $\omega$  sehr schnell. Man kann also immer ein  $\omega_0$  so wählen, daß für  $\omega > \omega_0$  die Bedingung (13') erfüllt ist. Dabei braucht  $\omega_0$  gar nicht sehr groß zu sein, denn das erste Glied der Reihe  $\sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} 1/L_n$  entspricht ja dem Werte  $\omega = 3\omega_0$ ; die Monotonie ist also nur für  $\omega > 3\omega_0$  erforderlich.

Wir fassen zusammen: Um der Forderung (13') zu entsprechen, müssen wir uns auf die Untersuchung der periodischen Lösungen (4) mit  $\omega > \omega_0$  beschränken, wo  $\omega_0$  geeignet gewählt ist.

Wir kehren zurück zu (22) und beschränken uns der Einfachheit halber auf Differentialgleichungen (1), in denen  $L(D)$  ein HURWITZ-Polynom ist. Dann ist

$$|Y_1(\omega)| = r_{m-1} \omega |(\omega^2 - \omega_{h1}^2)(\omega^2 - \omega_{h2}^2) \dots (\omega^2 - \omega_{hk}^2)|$$

wo  $\omega_{h1}, \omega_{h2}, \dots, \omega_{hk}$  die Näherungswerte der Frequenz sind, die uns das Verfahren der harmonischen Balance liefert. Aus (22) folgt

$$|(\omega^2 - \omega_{h1}^2)(\omega^2 - \omega_{h2}^2) \dots (\omega^2 - \omega_{hk}^2)| \leq \frac{\kappa_0}{\omega_0 r_{m-1}}$$

wobei  $\kappa_0$  für den Wert  $\omega = \omega_0$  zu berechnen ist. Sollten einige der  $\omega_{hk}$  kleiner als  $\omega_0$  sein, so müssen wir wegen der Annahme  $\omega > \omega_0$  auf ihre Untersuchung verzichten. Für diese Werte ist aber



$|\omega^2 - \omega_{hi}^2| > \delta$ , wo  $\delta = \min |\omega_0^2 - \omega_{hi}^2|$  bezeichnet. Deshalb gilt für die übrigen (rechts von  $\omega_0$  liegenden Werte  $\omega_{hj}$ , die wir wieder neu fortlaufend numerieren) die Ungleichung

$$|(\omega^2 - \omega_{h1}^2)(\omega^2 - \omega_{h2}^2) \cdots (\omega^2 - \omega_{hp}^2)| \leq \frac{\kappa_0}{\omega_0 r_{m-1} \delta^{k-p}}$$

und weiter

$$|(\omega - \omega_{h1})(\omega - \omega_{h2}) \cdots (\omega - \omega_{hp})| \leq \frac{\kappa_0}{\omega_0 r_{m-1} \delta^{k-p} (\omega_0 + \omega_{h1})(\omega_0 + \omega_{h2}) \cdots (\omega_0 + \omega_{hp})}.$$

Es sei

$$\omega_0 < \omega_{h1} < \omega_{h2} < \cdots < \omega_{hp}.$$

Untersuchen wir beispielsweise den Näherungswert  $\omega_{h2}$ . Der strenge  $\omega_2$ -Wert liege im Intervall  $(I_1)$   $\omega_{h1} + \eta < \omega < \omega_{h3} - \eta$ . Dann ist  $|\omega - \omega_{hi}| > \eta$  für  $i = 1, 3, 4, \dots, p$  und deshalb

$$|\omega - \omega_{h2}| \leq \frac{\kappa_0}{\omega_0 r_{m-1} \delta^{k-p} (\omega_0 + \omega_{h1}) \cdots (\omega_0 + \omega_{hp}) \eta^{p-1}} = \varepsilon_0,$$

d. h.  $\omega_2$  liegt im Intervall  $(I_2)$   $\omega_{h2} - \varepsilon_0 < \omega < \omega_{h2} + \varepsilon_0$ . Ist  $\omega_{h1} + \eta < \omega_{h2} - \varepsilon_0$  und  $\omega_{h3} - \eta > \omega_{h2} + \varepsilon_0$ , so ist es uns gelungen, aus der schwächeren Annahme  $(I_1)$  die schärfere Folgerung  $(I_2)$  zu ziehen.

Nun berechnen wir  $\kappa$  von Neuem, nicht mehr für  $\omega = \omega_0$  sondern für  $\omega = \omega_{h2} - \varepsilon_0$ . Es ergibt sich  $\kappa_1 < \kappa_0$  und damit eine bessere Abschätzung  $|\omega - \omega_{h2}| < \varepsilon_1 < \varepsilon_0$  usw. Auf diese Weise erhalten wir immer schärfere Abschätzungen des Betrages  $|\omega - \omega_{h2}|$ , wobei  $\varepsilon$  einem gewissen Grenzwert zustrebt.

Nachdem für  $\omega$  die endgültige Abschätzung  $|\omega - \omega_h| \leq \varepsilon^*$  gefunden ist, wendet man sich dem Amplitudenfehler zu.

Die zweite Gleichung (19) kann wegen der Abschätzung (21) für  $|\beta_1|$  auch in der Form

$$K a = \bar{B}_1(a) \quad (23)$$

geschrieben werden, wo  $K = -[X_1(\omega) + \vartheta \kappa]$ ,  $|\vartheta| \leq 1$ , ist. Die Amplitude  $a$  erhält man bei graphischer Lösung als Abszisse des Schnittpunktes der Kurve  $y = \bar{B}_1(a)$  mit der Geraden  $y = K a$ . Wir bestimmen nun mit Hilfe der endgültigen Frequenzabschätzung  $|\omega - \omega_h| \leq \varepsilon^*$  und unter Beachtung des entsprechenden  $\kappa$ -Wertes die Extremwerte von  $K$  und bringen  $y = K_{\max} \cdot a$  und  $y = K_{\min} \cdot a$  zum Schnitt mit  $y = \bar{B}_1(a)$ . Die Abszissen der Schnittpunkte begrenzen dasjenige Intervall, in welchem die Amplitude liegen muß.

Wir beschränken uns auf diese skizzenhafte Darstellung des vorgeschlagenen Verfahrens und bringen anschließend ein einfaches Beispiel, das die Anwendbarkeit der Methode demonstrieren soll.

## 7. Beispiel

Wir benutzen die gewonnenen Abschätzungen und das vorgeschlagene Verfahren zur Untersuchung der möglichen periodischen Lösungen der Gleichung

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x + f(x) = 0 \quad (*).$$

Von der Funktion  $f(x)$  nehmen wir an, daß sie allen oben getroffenen Voraussetzungen entspricht und  $M = 3$  ist.

In unserem Fall ist

$$X(\omega) = 4 - 2\omega^2, \quad Y(\omega) = \omega(3 - \omega^2),$$

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{|L(i\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{4(\omega^2 - 2)^2 + \omega^2(\omega^2 - 3)^2}}.$$

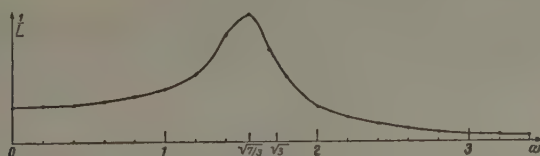


Bild 1

Der Verlauf von  $1/L$  zeigt bei  $\omega = \sqrt{7/3}$  ein Maximum; rechts vom Maximum nimmt der Wert  $1/L$  monoton ab (Bild 1). Wir stellen rechnerisch fest, daß die Bedingung (13') für  $\omega = 1$  erfüllt ist, denn es ist:

$$3,62 M \cdot \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{L_n} \Big|_{\omega=1} = 0,71 < 1.$$

Dann ist aber (13') wegen der Monotonie von  $1/L$  bei  $\omega > 3$  für alle  $\omega > 1$  auch erfüllt. Dementsprechend untersuchen wir periodische Lösungen, deren Frequenz größer als 1 ist.

1. Schritt. Für  $\omega > 1$  ist

$$\sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{L_n} < 0,065; \quad \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n L_n} < 0,022; \quad \kappa < 1,3$$

und folglich

$$Y(\omega) \equiv |\omega(\omega - \sqrt{3})(\omega + \sqrt{3})| < 1,3,$$

d. h.

$$|\omega - \sqrt{3}| < \frac{1,3}{\omega(\omega + \sqrt{3})}.$$

Wegen  $\omega > 1$  bekommt man

$$|\omega - \sqrt{3}| < \frac{1,3}{1(1 + \sqrt{3})} < 0,48.$$

Wir können diese erste Abschätzung gleich verbessern, denn aus ihr folgt  $\omega > \sqrt{3} - 0,48 > 1,25$  und damit

$$|\omega - \sqrt{3}| < \frac{1,3}{1,25(1,25 + \sqrt{3})} < 0,35.$$

Verbessern wir auf dieselbe Weise weiter, so erhalten wir als Endresultat des ersten Schrittes

$$|\omega - \sqrt{3}| < 0,29.$$

2. Schritt. Aus der letzten Abschätzung folgt  $\omega > 1,44$ . Unter dieser Voraussetzung berechnen wir von neuem die Summen  $\sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} 1/L_n$  usw. und erhalten

$$\sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{L_n} < 0,022; \quad \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n L_n} < 0,006; \quad \kappa < 0,33.$$

Hieraus folgt die bessere Abschätzung

$$|\omega - \sqrt{3}| < 0,06.$$

3. Schritt. Jetzt ist  $\omega > \sqrt{3} - 0,06$  und demnach

$$\sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{L_n} < 0,0143; \quad \sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n L_n} < 0,0039; \quad \kappa < 0,193$$

und

$$|\omega - \sqrt{3}| < 0,034.$$

Setzen wir in derselben Weise fort, so erhalten wir immer engere Schranken. Das mögliche  $\omega$ -Intervall kann jedoch nie auf einen Punkt zusammenschrumpfen, denn die kleinstmöglichen Werte von  $\sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} 1/L_n$  und  $\sum_{n=3,5,\dots}^{\infty} 1/n L_n$  sind jedenfalls für  $\omega < \sqrt{3}$  zu berechnen. Sie sind also größer als diejenigen für  $\omega = \sqrt{3}$  und diesen würde die Abschätzung

$$|\omega - \sqrt{3}| < 0,0267$$

entsprechen.

Wir beschränken uns im Weiteren auf das Ergebnis

$$|\omega - \sqrt{3}| < 0,03.$$

Mit dieser Abschätzung und mit dem entsprechenden Wert von  $\kappa$  erhält man für die Extremwerte des Koeffizienten  $K = -(X_1(\omega) + \vartheta\kappa)$  in (23):

$$K_{\min} = \min [-(X_1(\omega) + \vartheta\kappa)] = 1,61; \quad K_{\max} = \max [-(X_1(\omega) + \vartheta\kappa)] = 2,39.$$

Der dem Näherungswert  $\omega_h$  entsprechende  $K$ -Wert ist (da man in diesem Fall  $\kappa = 0$  zu setzen hat)

$$K_h = 2.$$

Wir zeichnen in der  $(a, y)$ -Ebene die Geraden  $y = K_{\min} \cdot a$  und  $y = K_{\max} \cdot a$ .

Die Kurve  $\bar{B}_1(a)$  liegt wegen  $|f(x)| \leq M = 3$  rechts von der gestrichelten Geraden mit dem Richtungskoeffizienten 3 (Bild 2).

Die Schnittpunkte von  $\bar{B}_1(a)$  und  $K(a)$  entscheiden über die Amplitude  $a$ .

Wir sehen, daß in Abhängigkeit von der Funktion  $f(x)$  sehr verschiedene Fälle möglich sind.

1. Die Kurve  $\bar{B}_1(a)$  kann ganz im Bereich I liegen (wenn  $f(x) = 3x + \varepsilon q(x)$ , also fast linear ist) oder ganz im Bereich III (wenn  $f(x)$  eine große Unempfindlichkeitszone besitzt). In



beiden Fällen gibt es keine von Null verschiedenen Schnittpunkte von  $y = \bar{B}_1(a)$  und  $y = K a$ , folglich ist  $a = 0$  und wegen (17) gibt es überhaupt keine periodische Lösung der vermuteten Art.

2. Die Kurve  $\bar{B}_1(a)$  kann von I über II nach III laufen (Bild 3); dann erhalten wir sicher einen Schnittpunkt und damit einen reellen  $a$ -Wert, wobei dieser im Intervall  $a_{\min} \leq a \leq a_{\max}$  liegen muß. Der mögliche Fehler der harmonischen Balance ist nicht größer als  $a_h - a_{\min}$  bzw.  $a_{\max} - a_h$ , wo  $a_h$  die Abszisse des Schnittpunktes von  $y = K_h \cdot a$  mit  $y = \bar{B}_1(a)$  ist.

3. Schließlich ist es möglich, daß  $\bar{B}_1(a)$  nur einen der beiden äußersten  $K$ -Strahlen schneidet (Bild 4). In diesem Falle ist es nicht sicher, ob ein Schnittpunkt überhaupt existiert, und für das mögliche  $a$  (Bild 4) kann nur eine Schranke angegeben werden, z. B.  $a < a_{\max}$ .

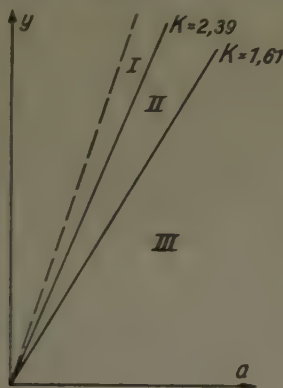


Bild 2

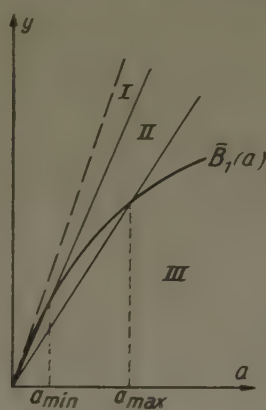


Bild 3

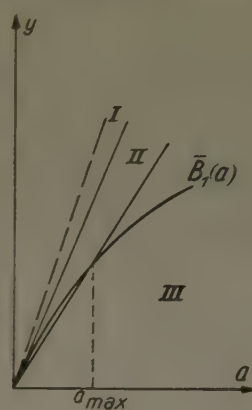


Bild 4

Zu untersuchen bleibt noch die Restreihe  $\sum_3$ . Für sie erhalten wir aus (17)

$$\left| \sum_3 \right| \leq \frac{3,62 \cdot 3 a}{1 - 3,62 \cdot 3 \cdot 0,0143} \cdot 0,0039$$

d. h. es ist

$$\left| \sum_3 \right| \leq 0,05 a.$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

1. Wenn die Gleichung (\*) eine periodische Lösung mit einer Frequenz  $\omega > 1$  besitzt, so kann diese Frequenz nur den Wert  $\omega = \sqrt{3} \pm 0,03$  haben, d. h. die Abweichung der Frequenz vom Näherungswert  $\omega_h = \sqrt{3}$  der harmonischen Balance beträgt höchstens 2%.

2. Die Lösung weicht von einem sinusförmigen Verlauf nur sehr wenig ab, denn für die Restreihe gilt  $\sum_3 \leq 0,05 a$ , d. h. die Abweichung von der Sinuskurve beträgt höchstens 5%.

3. Die Feststellungen 1. und 2. sind von der Nichtlinearität weitgehend unabhängig; nur  $f(-x) = -f(x)$  und  $|f'(x)| \leq 3$  wird vorausgesetzt.

4. Die Bestimmung der Amplitude und des möglichen Amplitudenfehlers ist nur bei genaueren Angaben über die Funktion  $f(x)$  möglich. Ist

$$\bar{B}_1(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(a \sin u) \sin u \, du < 1,61 a \quad \text{oder} \quad > 2,39 a$$

so existiert überhaupt keine periodische Lösung (4) mit  $\omega > 1$ .

Verläuft aber  $\bar{B}_1(a)$  auch im Bereich II, so kann für die Amplitude  $a$  ein gewisses Wertintervall angegeben werden. Die mögliche Abweichung vom Näherungswert der harmonischen Balance ist recht groß, sie kann u. U. größer als der Näherungswert selbst sein.

### Literatur

- [1] K. MAGNUS, Über ein Verfahren zur Untersuchung nichtlinearer Schwingungs- und Regelungssysteme, VDI-Forschungsheft 451.
- [2] R. J. KOCHENBURGER, Trans. AIEE 69, Pt I, 1950, 270—284.
- [3] M. A. AYERMAN, Vorlesungen über die Theorie der automatischen Regelung, Moskau 1958.
- [4] A. ZYGMUND, Trigonometrical Series.
- [5] E. P. POPOW, Dynamik automatischer Regelsysteme, Berlin 1958.

Manuskripteingang: 6. 10. 1959

Anschrift: Dr. P. SAGBOW, Denkendorf, Kr. Essl./N., Claudiusstr. 8

# Die Totalreflexion einer kugelförmigen Kompressionsfront an der Trennungsebene zweier elastischer Medien<sup>1)</sup>

Von K. HASSELMANN

*Es werden sämtliche bei der Totalreflexion auftretenden Stoßfronten — einschließlich der v. Schmidt'schen Kopfwellen — ermittelt. Durch Änderung der Bezeichnung erhält man gleichzeitig die Totalreflexion einer harmonischen Kugelwelle. Das Problem wird in der akustischen Näherung (kleine Störfelder) behandelt.*

*All shock waves — including the v. Schmidt head waves — that occur in the total reflexion of a spherical shock wave are determined. By changing the notation the total reflexion of a harmonic spherical wave is obtained. The problem is treated in the acoustic approximation (small perturbation fields).*

Определяются все ударные волны, встречающиеся при полном отражении сферической ударной волны, включая и головную волну фон Шмидта. При помощи замены обозначений получается одновременно и полное отражение гармонической сферической волны. Задача решается в акустическом приближении (т. е., рассматриваются небольшие поля возмущений).

In der vorliegenden Arbeit werden die Stoßfronten ermittelt, die beim Auftreffen einer kugelförmigen Kompressionsfront auf die Übergangsebene von einem schalldichterem zu einem schalldünnern elastischen Medium entstehen. Vorausgesetzt werden schwache Fronten, auf die die linearisierten Bewegungsgleichungen anwendbar sind. Auf Grund einfacher Strahlengangbetrachtungen wird man zunächst je zwei reflektierte und gebrochene Fronten erwarten. Daneben treten jedoch noch drei bis fünf weitere Fronten auf, die sich mit Hilfe der geometrischen Akustik nicht mehr erklären lassen. Sie sind von O. v. SCHMIDT [1] an Hand seiner bekannten Knallwellenaufnahmen als „Kopfwellen“ gedeutet worden, die von den gebrochenen Fronten an der Trennungsebene ausgestrahlt werden. Bisher ist es erst für den einfachsten Fall der Totalreflexion einer harmonischen Kugelwelle an der Trennungsebene zweier Flüssigkeiten gelungen, eine solche Kopfwellen zu berechnen (H. OTT [2])<sup>2)</sup>. Sie ergab sich als Effekt zweiter Ordnung aus der Integraldarstellung der reflektierten Störung, die mit funktionentheoretischen Mitteln näherungsweise ausgewertet wurde. Eine Anwendung dieses Verfahrens auf den wichtigeren Fall der Totalreflexion in elastischen Medien erscheint jedoch aussichtslos, da die Reflexions- und Brechungsfaktoren, welche dazu explizit vorliegen müssen, äußerst kompliziert werden.

Es wird hier nun eine einfache Methode zur Ermittlung sämtlicher Fronten entwickelt, die sich auf beliebige Mediapaaire anwenden läßt. Ausgangspunkt der Methode ist die von J. NITSCHKE [9] auf Anregung von W. TOLLMIEHN behandelte normale Reflexion und Brechung einer kugelförmigen Stoßfront an der Trennungsebene zweier Flüssigkeiten. In diesem Falle treten keine Kopfwellen auf, da sich die gebrochene Front langsamer als die einfallende Front ausbreitet. Im Falle der Totalreflexion wird nun zur Erfassung der Kopfwellen, welche einen Effekt zweiter Ordnung darstellen, die Methode von NITSCHKE um eine Ordnung erweitert. Ferner werden die Ansätze in naheliegender Weise verallgemeinert, um die in elastischen Medien zusätzlich auftretenden Scherungsfronten mitzuerfassen. Neben Stoßfronten lassen sich mit der gleichen Methode ebenfalls periodische Wellen behandeln, wobei die Ergebnisse des einen Falls unmittelbar auf den anderen übertragbar sind.

## I. Die Fortpflanzung von Unstetigkeiten in elastischen Medien

Die Bewegungsgleichungen für die (kleine) Verschiebung  $\vec{s}$  in einem isotropen elastischen Medium lauten:

$$\varrho \frac{\partial^2 \vec{s}}{\partial t^2} = (2\mu + \lambda) \text{grad div } \vec{s} - \mu \text{rot rot } \vec{s} \quad \dots \quad (1.1)$$

( $\lambda$  und  $\mu$  sind die LAMÉschen Elastizitätsmoduln,  $\varrho$  ist die Dichte des Mediums).

<sup>1)</sup> Dissertationsauszug. Herrn Prof. Dr. W. TOLLMIEHN bin ich für die Anregung zur vorliegenden Arbeit sowie für die mir im Max-Planck-Institut für Strömungsforschung gewährte Unterstützung zu aufrichtigem Dank verpflichtet.

<sup>2)</sup> Siehe ferner [3], [4], [5], [6] und [7]. Bei dem etwas anderen Problem der Ausbreitung der Störung, die durch einen Spannungsstoß längs einer Geraden auf der Oberfläche eines elastischen Halbraums erzeugt wird, fand weiterhin F. SAUTER [8], daß eine Kopfwellen in Form einer singulären Fläche auftritt.



Sie lassen sich durch zwei Typen von Grundlösungen befriedigen: Bei einem wirbelfreien Verschiebungsfeld ist  $\tilde{s}$  durch ein skalares Potential  $\varphi$  darstellbar, welches der Wellengleichung mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $c^k = \left(2\frac{\mu}{\rho} + \lambda\right)^{1/2}$  genügt:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{(c^k)^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad \dots \quad (1.2).$$

Im Falle eines quellenfreien Verschiebungsfeldes läßt sich  $\tilde{s}$  dagegen aus einem Vektorpotential  $\alpha$  ableiten, welches die Wellengleichung mit der kleineren Wellengeschwindigkeit  $c^u = (\mu/\rho)^{1/2}$  befriedigt:

$$\Delta\alpha - \frac{1}{(c^u)^2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2} = 0 \quad \dots \quad (1.3).$$

Die bekanntesten Spezialfälle der Grundlösungen von Typ (1.2) und (1.3) sind die longitudinalen und transversalen ebenen Wellen.

Wir werden hier vorwiegend Lösungen betrachten, die auf gewissen Unstetigkeitsflächen Sprünge in den Spannungen und in der Teilchengeschwindigkeit  $v = \frac{\partial \tilde{s}}{\partial t}$  (oder in deren Ableitungen) aufweisen. Dabei werden als Kompressionsfronten Flächen bezeichnet, auf denen die zweite Normalableitung  $\partial^2 \varphi / \partial n^2$  des skalaren Potentials und folglich die Normalkomponenten der Teilchengeschwindigkeit und der Spannung unstetig sind. Flächen, auf denen die zweite Normalableitung von  $\alpha$  und damit die Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit und der Spannung unstetig sind, bezeichnen wir dann nach einem Vorschlag von W. TOLLMIEß, da hier eine Unstetigkeit in dem Wirbelanteil der Verschiebung vorliegt, als Wirbelfronten.

Da sich bekanntlich Unstetigkeitsflächen von Lösungen der Wellengleichung mit der Wellengeschwindigkeit ausbreiten [10], werden die Unstetigkeiten in den Normalableitungen mit Unstetigkeiten in den zeitlichen Ableitungen gekoppelt sein. Als maßgebende Sprunggrößen führen wir daher die Unstetigkeiten in den Ableitungen  $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \varphi(\tau, \tau)$  und  $\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \alpha(\tau, \tau)$  ein, wo  $\tau(\tau, t) = 0$  die Gleichung der Unstetigkeitsfläche darstellt. Die Sprünge in den Komponenten der Geschwindigkeit und der Spannung auf einer Kompressionsfront lassen sich dann mit Hilfe von (1.2) und der Beziehung

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i} \right) + \lambda \delta_{ij} \sum_i \frac{\partial s_i}{\partial x_i} \quad \dots \quad (1.4)$$

zwischen dem Spannungstensor  $\sigma_{ij}$  und den Verschiebungen  $s_i$  folgendermaßen durch  $\Phi_1 = \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \right]$  ausdrücken:

$$[v_n] = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial n} \cdot \Phi_1, \quad [v_m] = 0 \quad \dots \quad (1.5),$$

$$[\sigma_{nn}] = \rho \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^2 (c^k)^2 \Phi_1, \quad [\sigma_{mm}] = \rho \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^2 ((c^k)^2 - 2(c^u)^2) \cdot \Phi_1, \quad [\sigma_{nm}] = 0 \quad \dots \quad (1.6).$$

Die eckigen Klammern bezeichnen Unstetigkeiten. Als positive Richtung der Frontnormalen  $n$  wählen wir die Fortschrittsrichtung. Das Vorzeichen der Tangentialrichtung  $m$  (in der  $rz$ -Ebene) wird durch die Bedingung  $\partial(r, z)/\partial(m, n) = 1$  festgelegt.

Auf einer Wirbelfront werden die Unstetigkeiten der Tangentialkomponenten der Spannung und Geschwindigkeit im allgemeinen auf zwei unabhängige Sprunggrößen, die den beiden unabhängigen Verschiebungskomponenten tangential zur Front entsprechen, zurückzuführen sein. Wir werden uns jedoch im folgenden auf rotationssymmetrische Verschiebungsfelder mit verschwindenden Azimutalkomponenten beschränken. In diesem Fall reduziert sich das Vektorpotential  $\alpha$  auf die skalare Stromfunktion  $\omega$  mit  $(r, z)$  Zylinderkoordinaten

$$s_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial z}, \quad s_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \quad \dots \quad (1.7).$$

Aus (1.3) ergibt sich für  $\frac{\omega}{r}$  die etwas modifizierte Wellengleichung:

$$\Delta \left( \frac{\omega}{r} \right) - \frac{1}{(c^u)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\omega}{r} \right) - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\omega}{r} \right) = 0 \quad \dots \quad (1.8).$$

Die Sprünge in den Komponenten der Geschwindigkeiten und Spannungen auf einer Wirbelfront sind nun auf die eine Sprunggröße

$$\Omega_1 = \left[ \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( \frac{\omega}{r} \right) \right]$$

zurückführbar:

$$[v_n] = 0, \quad [v_m] = - \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right) \Omega_1 \quad . . . . . (1.9),$$

$$[\sigma_{nn}] = [\sigma_{mm}] = 0, \quad [\sigma_{nm}] = - \varrho \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^2 (c^w)^2 \Phi_1 \quad . . . . . (1.10).$$

Neben Flächen, auf denen die Spannungen und Geschwindigkeiten unstetig sind, werden wir im folgenden auch sogenannte Fronten 2. Ordnung betrachten, auf denen erst die Normalableitungen dieser Größen Sprünge aufweisen. Bezeichnen wir die Unstetigkeiten zweiter Ordnung mit

$$\Phi_2 = \left[ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \tau^3} \right] \quad \text{bzw.} \quad \Phi_2 = \left[ \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} \left( \frac{\omega}{r} \right) \right],$$

so folgen für die Sprünge in den Normalableitungen der Geschwindigkeiten und Spannungen auf einer Kompressionsfront 2. Ordnung:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial n} v_n \right] = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial \tau}{\partial n} \Phi_2, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial n} v_m \right] = 0 \quad . . . . . (1.11),$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{nn} \right] = \varrho \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^3 (c^k)^2 \Phi_2, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{mm} \right] = \varrho \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^3 ((c^k)^2 - 2(c^w)^2) \Phi_2, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{nm} \right] = 0 \quad (1.12),$$

und auf einer Wirbelfront 2. Ordnung:

$$\left[ \frac{\partial}{\partial n} v_n \right] = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial n} v_m \right] = - \frac{\partial \tau}{\partial t} \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^2 \Omega_2 \quad . . . . . (1.13),$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{nn} \right] = \left[ \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{mm} \right] = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial n} \sigma_{nm} \right] = - \varrho \left( \frac{\partial \tau}{\partial n} \right)^3 (c^w)^2 \Omega_2 \quad . . . . . (1.14).$$

Die sich mit der Geschwindigkeit  $c^k$  bzw.  $c^w$  fortlaufenden Unstetigkeitsflächen können mittels einer Parameterdarstellung beschrieben werden, die im Falle der Rotationssymmetrie die Form:

$$z = z_0(\vartheta) + \eta \cos \vartheta, \quad r = r_0(\vartheta) + \eta \sin \vartheta, \quad t = \eta/c^k \quad \text{bzw.} \quad \eta/c^w \quad . . . . . (1.15)$$

annimmt, wobei die Funktionen  $z_0(\vartheta)$  und  $r_0(\vartheta)$  der Bedingung  $\cos \vartheta (dz_0/d\vartheta) + \sin \vartheta (dr_0/d\vartheta) = 0$  genügen. Der Parameter  $\eta$  stellt den von der Front zurückgelegten Weg dar, während  $\vartheta$  die Richtung der Frontnormalen angibt. Neben der Parameterdarstellung werden wir ferner die Frontgleichung in der Form

$$\tau(r, t) \equiv t - \frac{\eta(r, z)}{c} = 0$$

verwenden.

Bekanntlich pflanzen sich Unstetigkeiten von Lösungen der Wellengleichung (1.2) — oder (1.8) — längs der Normalstrahlen der Fronten fort, wobei sie nach dem Intensitätsgesetz der geometrischen Akustik abklingen [10] [11]:

$$\frac{\Phi_i(\eta, \vartheta)}{\Omega_i(\eta, \vartheta)} = \frac{\Phi_i(\eta_0, \vartheta)}{\Omega_i(\eta_0, \vartheta)} \sqrt{\frac{|a \cdot b|_{\eta=\eta_0}}{|a \cdot b|}} \quad (i = 1, 2) \quad . . . . . (1.16)$$

$a$  und  $b$  sind die beiden Hauptkrümmungsradien der Front an der betrachteten Unstetigkeitsstelle<sup>3)</sup>.  $\eta_0$  bezeichnet einen Anfangspunkt auf dem durch  $\vartheta$  festgelegten Strahl. Bei rotations-symmetrischen Fronten liegt einer der Krümmungsmittelpunkte auf der  $z$ -Achse, während der andere mit dem Krümmungsmittelpunkt der Meridiankurve zusammenfällt. Man findet somit aus der Parameterdarstellung (1.15):

$$a = \eta + r_0 \frac{1}{\sin \vartheta}, \quad b = \eta + r_0 \frac{1}{\cos \vartheta} \quad . . . . . (1.17).$$

<sup>3)</sup> Es wird hier vorausgesetzt, daß sich die Vorzeichen von  $a$  und  $b$  nicht ändern. Für das Verhalten von Stoßfronten beim Durchgang durch Krümmungsmittelpunkte siehe [10].



## II. Die Analogie zwischen Stoßfronten und periodischen Wellen kleiner Wellenlänge

Die Fortpflanzungsgesetze für Stoßfronten stehen in enger Beziehung zu den Gesetzen der geometrischen Akustik, welche die Ausbreitung periodischer Wellen kleiner Wellenlänge beschreiben. Diese ergeben sich bekanntlich aus der Wellengleichung (1.2) durch Einsetzen einer Näherungslösung der Form

$$\varphi_1(r, t) = A_1(r, t) \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} c^k \tau(r, t)\right) \dots \dots \dots (2.1).$$

Die Änderungen der zunächst beliebigen Funktionen  $A_1(r, t)$  und  $\tau(r, t)$  innerhalb einer Wellenlänge  $\lambda$  werden dabei als klein angenommen. Durch Vergleich der Glieder gleicher Größenordnung findet man, daß die Phasenflächen  $\tau = \text{const}$  sich mit der Wellengeschwindigkeit  $c^k$  ausbreiten, während die Amplituden  $A_1$  sich längs der Orthogonalstrahlen dieser Flächen nach dem Gesetz (1.16) fortpflanzen. Dasselbe gilt für die Näherungslösung

$$\left(\frac{\omega}{r}\right)_1 = B_1 \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} c^w \tau\right) \dots \dots \dots (2.2)$$

der modifizierten Wellengleichung (1.8). In den Fortpflanzungsgesetzen besteht somit eine Äquivalenz zwischen den Amplituden  $A_1$  bzw.  $B_1$  einer Welle mit den Phasenflächen  $\tau = \text{const}$  und den Unstetigkeiten  $\Phi_1$  bzw.  $\Omega_1$  auf einer Stoßfront  $\tau = 0$ . Es läßt sich unschwer zeigen, daß diese Äquivalenz bei Reflexions- und Brechungsproblemen auch in den Grenzbedingungen besteht. Das Analagon zu den Unstetigkeiten 2. Ordnung sind dabei die Amplituden  $A_2$  bzw.  $B_2$  der entsprechenden Wellen 2. Ordnung

$$\varphi_2 = A_2 \frac{\lambda}{2\pi i c^k} \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} c^k \tau\right) \dots \dots \dots (2.3),$$

$$\left(\frac{\omega}{r}\right)_2 = B_2 \frac{\lambda}{2\pi i c^w} \exp\left(\frac{2\pi i}{\lambda} c^w \tau\right) \dots \dots \dots (2.4).$$

Um von dem im folgenden betrachteten Fall der Totalreflexion einer einfallenden kugelförmigen Kompressionsfront zum Fall einer einfallenden Kugelwelle überzugehen, hat man somit lediglich die Stoßfronten  $\tau = 0$  durch die Phasenflächen  $\tau = \text{const}$  und die Unstetigkeiten durch die Amplituden entsprechender Ordnung zu ersetzen.

## III. Die Totalreflexion einer kugelförmigen Kompressionsfront an der Trennungsebene zweier elastischer Medien. Fronten 1. Ordnung

Wir betrachten nunmehr eine kugelförmige Kompressionsfront 1. Ordnung, die sich von dem Punkt  $r = 0, z = -h$  innerhalb eines elastischen Mediums I im Halbraum  $z < 0$  ausbreitet und an einem elastischen Medium II, das den übrigen Halbraum  $z > 0$  erfüllt, reflektiert und gebrochen wird. Es sei  $c_1^k < c_2^k$ . Beim Auftreffen der einfallenden Front auf die Trennungsebene  $z = 0$  entstehen zunächst in beiden Medien je eine Kompressions- und eine Wirbelfront. Im folgenden werden einfallende, reflektierte und gebrochene Fronten durch einen ersten oberen Index  $e, r$  oder  $g$  und die Art der Front durch einen zweiten oberen Index  $k$  oder  $w$  unterschieden.

Die Parameterdarstellung der einfallenden Front lautet:

$$z = -h + \eta^{ek} \cos \vartheta^{ek}, \quad r = \eta^{ek} \sin \vartheta^{ek}, \quad t = \eta^{ek}/c_1^k \dots \dots \dots (3.1).$$

Die Parameterdarstellungen der reflektierten und gebrochenen Fronten ergeben sich aus der Bedingung, daß sämtliche Fronten an der Trennungsebene  $z = 0$  zusammentreffen. Wird mit dem Index  $i$  allgemein ein beliebiges Indexpaar bezeichnet, so erhält man:

$$\left. \begin{array}{l} \text{reflektierte Fronten: } -z \\ \text{gebogene Fronten: } +z \end{array} \right\} = \frac{-h \cos \vartheta^i}{n^i \cos \vartheta^e} + \eta^i \cos \vartheta^i, \quad \left. \begin{array}{l} r = \frac{h \sin \vartheta^i}{n^i \cos \vartheta^e} (n^i - 1) + \eta^i \sin \vartheta^i, \\ t = \eta^i/c^i \end{array} \right\} \dots \dots \dots (3.2),$$

wobei  $n^i = c_1^k/c^i$  und  $n^i \sin \vartheta^i = \sin \vartheta^{ek}$ .

Bei festgehaltenem  $\vartheta^i$  beschreiben die Parameterdarstellungen (3.1) und (3.2) den Weg einer Unstetigkeitsstelle, die zunächst mit der Geschwindigkeit  $c_1^k$  längs des Strahls mit dem Einfallswinkel  $\vartheta^{ek}$  bis zur Trennungsebene läuft und sich dann mit den Geschwindigkeiten  $c^i$  längs der entsprechenden reflektierten und gebrochenen Strahlen fortpflanzt.

Die vorgegebene Unstetigkeit auf der einfallenden Front, die nach (1.16) wie  $1/R$  abklingt, sei

$$\Phi_1^{ek} = \Phi_{1h}^{ek} \frac{h}{R} \quad (\Phi_{1h}^{ek} = \Phi_1^{ek}(R=h), R = \text{Radius der einfallenden Front}) \quad (3.3).$$

Zur Bestimmung der Unstetigkeiten auf den reflektierten und gebrochenen Fronten werden nun die Grenzbedingungen angewandt. Für zwei an der Trennungsebene haftende Medien lauten diese:

$$v_z^I = v_z^{II}, \quad v_r^I = v_r^{II}, \quad \sigma_{zz}^I = \sigma_{zz}^{II}, \quad \sigma_{zr}^I = \sigma_{zr}^{II} \quad \text{für } z = 0 \quad (3.4).$$

Da die Beziehungen (3.4) sowohl eben vor als auch eben nach dem Eintreffen der Fronten an einem Punkt der Trennungsebene gelten, muß die Summe der Sprünge in  $v_r$ ,  $v_z$ ,  $\sigma_{zz}$  und  $\sigma_{zr}$  bei  $z = 0$  in beiden Medien gleich sein. Führt man die Sprünge in den Spannungen und Geschwindigkeiten auf die Sprunggrößen  $\Phi_1^i$  und  $\Omega_1^i$  zurück, so erhält man das von der Reflexion und Brechung ebener Wellen bekannte Gleichungssystem:

$$\tilde{\Phi}_1^{rk} \cos \vartheta^{rk} - \tilde{\Omega}_1^{rw} \sin \vartheta^{ek} + \tilde{\Phi}_1^{gk} n^{gk} \cos \vartheta^{gk} + \tilde{\Omega}_1^{gw} \sin \vartheta^{ek} = \tilde{\Phi}_1^{ek} \cos \vartheta^{ek} \quad (3.5),$$

$$\tilde{\Phi}_1^{rk} \sin \vartheta^{rk} + \tilde{\Omega}_1^{rw} n^{rw} \cos \vartheta^{rw} - \tilde{\Phi}_1^{gk} \sin \vartheta^{ek} + \tilde{\Omega}_1^{gw} n^{gw} \cos \vartheta^{gw} = -\tilde{\Phi}_1^{ek} \sin \vartheta^{ek} \quad (3.6),$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\Phi}_1^{rk} (n^{rw^2} - 2 \sin^2 \vartheta^{ek}) - \tilde{\Omega}_1^{rw} 2 n^{rw^2} \cos \vartheta^{rw} \sin \vartheta^{rw} \\ &- \tilde{\Phi}_1^{gk} \gamma \left( n^{rw^2} - 2 \left( \frac{n^{rw}}{n^{gw}} \right)^2 \sin^2 \vartheta^{ek} \right) - \tilde{\Omega}_1^{gw} 2 \gamma n^{rw^2} \cos \vartheta^{gw} \sin \vartheta^{gw} = \tilde{\Phi}_1^{ek} (2 \sin^2 \vartheta^{ek} - n^{rw^2}) \end{aligned} \quad (3.7),$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\Phi}_1^{rk} 2 \cos \vartheta^{ek} \sin \vartheta^{ek} + \tilde{\Omega}_1^{rw} n^{rw^2} (\cos^2 \vartheta^{rw} - \sin^2 \vartheta^{rw}) \\ &+ \tilde{\Phi}_1^{gk} 2 \gamma \left( \frac{n^{rw} n^{gk}}{n^{gw}} \right)^2 \cos \vartheta^{gk} \sin \vartheta^{gk} - \tilde{\Omega}_1^{gw} \gamma n^{rw^2} (\cos^2 \vartheta^{gw} - \sin^2 \vartheta^{gw}) = \tilde{\Phi}_1^{ek} 2 \cos \vartheta^{ek} \sin \vartheta^{ek} \end{aligned} \quad (3.8).$$

$$(\gamma = \varrho_{II}/\varrho_I).$$

Durch die Tilde sind Werte an der Trennungsebene gekennzeichnet. Zur Abkürzung schreiben wir das System im folgenden in der Matrixform  $M \mathfrak{r}_1 = \tilde{\Phi}_1^{ek} \mathfrak{B}$ , wo  $M$  die Koeffizientenmatrix und  $\mathfrak{r}_1$ ,  $\mathfrak{B}$  die Vektoren

$$\mathfrak{r}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\Phi}_1^{rk} \\ \tilde{\Omega}_1^{rw} \\ \tilde{\Phi}_1^{gk} \\ \tilde{\Omega}_1^{gw} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta^{ek} \\ -\sin \vartheta^{ek} \\ 2 \sin^2 \vartheta^{ek} - n^{rw^2} \\ 2 \cos \vartheta^{ek} \sin \vartheta^{ek} \end{pmatrix}$$

darstellen. Die Lösung des Gleichungssystems sei:

$$\tilde{\Phi}_1^i \text{ bzw. } \tilde{\Omega}_1^i = F^i(\vartheta^{ek}) \tilde{\Phi}_1^{ek} \quad (3.9).$$

Die Unstetigkeiten auf den Fronten im Innern der Medien bekommt man nun, indem man die Werte der Unstetigkeiten an der Trennungsebene als Anfangswerte in die Fortpflanzungsformel (1.16) einsetzt:

$$\Phi_1^i \text{ bzw. } \Omega_1^i = \frac{\Phi_{1h}^{ek} h F^i(\vartheta^{ek}) n^i \cos \vartheta^i}{\cos \vartheta^{ek} \left\{ \left( R + \frac{h(n^{i^2} - 1)}{\cos \vartheta^{ek}} \right) \left( R + \frac{h(n^{i^2} - 1)}{\cos^3 \vartheta^{ek}} \right) \right\}^{1/2}} \quad (3.10).$$

Neben dem Parameter  $\vartheta^{ek}$  ist zur Festlegung der Unstetigkeitsstelle der Radius  $R (= \eta^i n^i)$  der einfallenden Front gewählt worden. Für die kugelförmige reflektierte Kompressionsfront vereinfacht sich (3.10) zu

$$\Phi_1^{rk} = F^{rk}(\vartheta^{ek}) \Phi_{1h}^{ek} \frac{h}{R}.$$

Die Formel (3.10) gilt nur für  $\vartheta^{ek} < \vartheta_{krit}^{ek}$ , mit  $\sin \vartheta_{krit}^{ek} = n^{gk} = c_1^k/c_{II}^k$ . Für  $\vartheta^{ek} > \vartheta_{krit}^{ek}$  werden die von  $\cos \vartheta^{gk}$  abhängigen Terme der Koeffizientenmatrix  $M$  und somit sämtliche Reflexions- und Brechungsfaktoren  $F^i(\vartheta^{ek})$  komplex. Von den Parameterdarstellungen der Fronten wird ferner die der gebrochenen Kompressionsfront komplex. Das Auftreten komplexer Sprunggrößen bedeutet offensichtlich ein Versagen unserer Methode im Bereich der Totalreflexion  $\vartheta^{ek} > \vartheta_{krit}^{ek}$ . Im Falle einer einfallenden harmonischen Kugelwelle tritt diese Schwierigkeit dagegen nicht auf, da komplexe Amplituden lediglich eine Phasenverschiebung gegenüber der einfallenden Welle darstellen. Man kann diesen Vorteil für Sinuswellen auch für Stoßfronten ausnützen, indem man die einfallende Kompressionsfront durch ein FOURIERintegral über Kugelwellen verschiedener Wellenlänge darstellt. Auf diese Weise läßt sich zeigen, daß komplexe Sprunggrößen auf einer reellen Stoßfront logarithmische Singularitäten zur Folge haben.



Ist dagegen auch die Frontgleichung komplex, so tritt eine Singularität nur an der Trennungsebene auf. Dies wird durch die Aufnahmen von O. v. SCHMIDT bestätigt: die totalreflektierten Bereiche der Fronten erscheinen darin stets wesentlich stärker als die normal reflektierten und gebrochenen Bereiche, während die komplexen gebrochenen Fronten keine sichtbaren Störungen hervorrufen.

#### IV. Fronten 2. Ordnung (v. Schmidtsche Kopfwellen)

Nachdem die überkritischen Bereiche der einfallenden Front ( $\partial^{ek} > \partial_{krit}^{ek}$ ) die Trennungsebene erreicht haben, beginnt die gebrochene Kompressionsfront den anderen Fronten an der Trennungsebene voranzulaufen. Sie erzeugt dadurch ähnlich wie ein Überschallgeschoß „Kopfwellen“, die sich von der Trennungsebene aus in beide Medien hinein ausbreiten. In Bild 1 sind die Fronten zu einem entsprechenden Zeitpunkt nach Eintreten der Totalreflexion wiedergegeben. Die durch die kritischen Strahlen  $OJB$  und  $OJH$  begrenzten Bereiche  $BAB$  und  $HKH$  der reflektierten Kompressions- und Wirbelfronten sowie die durch die kritischen Strahlen  $OJM$  und  $OJF$  begrenzten Bereiche  $MLM$  und  $FEF$  der gebrochenen Kompressions- und Wirbelfronten sind noch durch normale Reflexion und Brechung entstanden. Für die Unstetigkeiten auf diesen Bereichen gilt die Formel (3.10). Auf den durch Totalreflexion entstandenen Bereichen  $CB$ ,  $CH$  der reflektierten Fronten und  $FC$  der gebrochenen Wirbelfront sind die Spannungen und Geschwindigkeiten logarithmisch singular, während die gebrochene Kompressionsfront bei  $C$  komplex ist. Die früher entstandene reelle gebrochene Kompressionsfront  $MLM$  ist dem Punkt  $C$  an der Trennungsebene vorausgelaufen und strahlt drei Kopfwellen  $MB$ ,  $MH$  und  $MF$  aus, welche an den Punkten  $B$ ,  $H$  und  $F$  in die reflektierten und gebrochenen Fronten 1. Ordnung tangential einmünden.

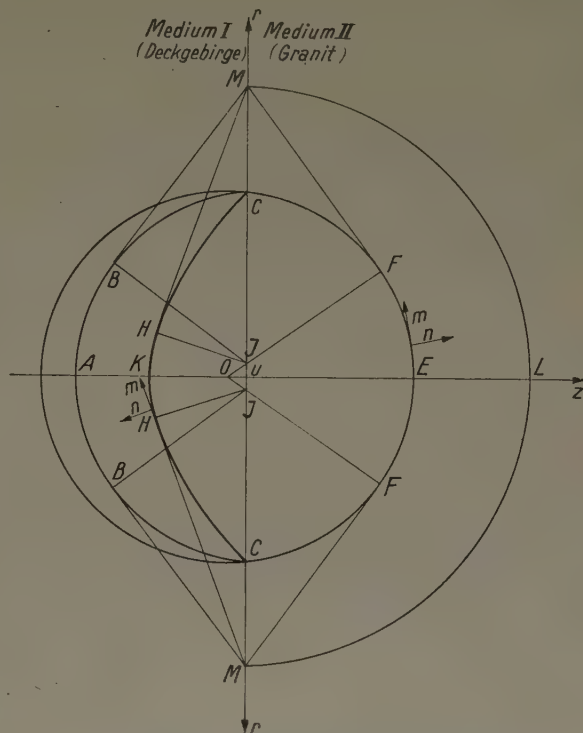


Bild 1. Die Reflexion und Brechung einer Kompressionsfront an der Trennungsebene zweier elastischer Medien  
 $R/h = 10$

Zur Ermittlung der Unstetigkeiten auf den Kopfwellen wenden wir die Grenzbedingungen an der Stelle  $M$  an. Eine Schwierigkeit scheint zunächst darin zu bestehen, daß mit den drei Kopfwellen vier Grenzbedingungen zu erfüllen sind. Nach (3.10) verschwindet jedoch die Unstetigkeit 1. Ordnung auf der gebrochenen Kompressionsfront bei  $M$ , so daß sich die Grenzbedingungen durch die triviale Lösung verschwindender Unstetigkeiten 1. Ordnung auf allen Kopfwellen erfüllen lassen. Für die Unstetigkeiten 2. Ordnung lassen sich nun aus den Grenzbedingungen wieder ähnliche Beziehungen ableiten wie für die Unstetigkeiten 1. Ordnung. Mit den Spannungen und Geschwindigkeiten sind auch die zeitlichen Ableitungen dieser Größen auf beiden Seiten der Trennungsebene gleich. Folglich werden auch die Sprünge der Ableitungen bei  $M$  in beiden Medien übereinstimmen:

$$\left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} \right]_I = \left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} \right]_{II}, \quad \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} \right]_I = \left[ \frac{\partial v_r}{\partial t} \right]_{II}, \quad \left[ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \right]_I = \left[ \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} \right]_{II}, \quad \left[ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial t} \right]_I = \left[ \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial t} \right]_{II}.$$

Die Unstetigkeiten der zeitlichen Ableitungen lassen sich bei den Kopfwellen durch die Sprunggrößen  $\Phi_2$  bzw.  $\Omega_2$  ausdrücken. Bei der gebrochenen Kompressionsfront hängen sie zusätzlich noch von der tangentialen Ableitung der Unstetigkeiten 1. Ordnung ab. So ist z. B.

$$\left[ \frac{\partial v_z}{\partial t} \right]^{qk} = \Phi_2^{qk} \frac{\partial \tau}{\partial z} \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial z} \Phi_1^{qk} \cdot \left( \frac{\partial \tau}{\partial t} \right)^2.$$

Man erhält somit aus den Grenzbedingungen das Gleichungssystem:

$$M_{krit} \varepsilon_2 = \chi \mathcal{C} \quad \dots \quad (4.1),$$

wobei  $M_{krit} = M(\partial_{krit}^{ek})$ ,

$$\chi_2 = \begin{pmatrix} \Phi_{2,1}^{ek}, r^k \\ \Omega_{2,1}^{ek}, r^w \\ \Phi_{2,2}^{ek} \\ \tilde{\Omega}_{2,2}^{ek}, g^w \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2\gamma n^{gk} \left( \frac{n^{rw,2}}{n^{gw}} \right)^2 \end{pmatrix}$$

und

$$\chi = \frac{\Phi_{1h}^{ek} h F^{gk}(\partial_{krit}^{ek}) n^{gk}}{\left[ (1 - n^{gk}) \tilde{r} \left( \tilde{r} - \frac{n^{gk} h}{1 - n^{gk}} \right)^{3/2} \right]}.$$

$\tilde{r}$  ist der Abstand des Punktes  $M$  vom Ursprung. Der Index  $\kappa$  bezieht sich auf eine Kopfwelle, das folgende Indexpaar auf die zugehörige Front 1. Ordnung.

Durch (4.1) sind die Unstetigkeiten 2. Ordnung auf den Kopfwellen und auf der gebrochenen Kompressionsfront an der Trennungsebene bestimmt. Im Innern der Medien ergeben sie sich dann wieder aus dem Fortpflanzungsgesetz (1.16), welches sich in diesem Fall vereinfacht, da der Krümmungsradius  $b$  der Meridiankurve unendlich wird. Man erhält somit schließlich für die Unstetigkeit zweiter Ordnung auf einer der Kopfwellen:

$$\Phi_{2,i}^{ek} \text{ bzw. } \Omega_{2,i}^{ek} = \frac{\Phi_{1h}^{ek} h F^{gk}(\partial_{krit}^{ek}) D^{\kappa,i} n^{gk} n^i c^i (1 - n^{gk})^{-1/2}}{\left( \tilde{r} - \frac{h n^{gk}}{1 - n^{gk}} \right)^{3/2} \left\{ \tilde{r} \left( 1 - \left( \frac{n^{gk}}{n^i} \right)^2 \right) + d \left( \frac{n^{gk,2}}{n^i} \right)^{1/2} \right\}} \left. \begin{array}{l} \dots (4.2) \\ \left( \frac{h n^{gk}}{1 - n^{gk}} < \tilde{r} < d \right) \end{array} \right\}$$

wobei  $d = \frac{R - h \sqrt{1 - (n^{gk})^2}}{n^{gk}}$  der Radius  $UM$  der Kopfwelle an der Trennungsebene ist.  $\tilde{r}$  ist der Radius  $UQ$  zu dem früheren Zeitpunkt, als sich die Unstetigkeitsstelle  $P$  an der Trennungsebene befand (siehe Bild 2).  $D^{\kappa,i}$  ist eine Komponente des durch das Gleichungssystem  $M_{krit} \cdot \mathfrak{D} = \mathfrak{C}$  bestimmten Vektors

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} D^{\kappa, rk} \\ D^{\kappa, rw} \\ D^{gk} \\ D^{\kappa, gw} \end{pmatrix}.$$

Die Parameterdarstellungen der Kopfwellen in Abhängigkeit von  $\tilde{r}^{\kappa,i}$  und  $\eta^{\kappa,i}$  lauten:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Medium I: } -z \\ \text{Medium II: } +z \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} -\tilde{r}^{\kappa,i} \cos \vartheta^{\kappa,i} \sin \vartheta^{\kappa,i} + (\eta^{\kappa,i} - \eta_0^{\kappa,i}) \cos \vartheta^{\kappa,i}, \\ r = \tilde{r}^{\kappa,i} \cos^2 \vartheta^{\kappa,i} + (\eta^{\kappa,i} - \eta_0^{\kappa,i}) \sin \vartheta^{\kappa,i}, \\ t = \eta^{\kappa,i} / c^i, \end{array} \right\} \dots (4.3).$$

mit

$$\sin \vartheta^{\kappa,i} = n^{gk} / n^i, \quad \eta_0^{\kappa,i} = \frac{h \sqrt{1 - (n^{gk})^2}}{n^i}$$

Falls neben  $n^{gk}$  außerdem der Brechungsindex  $n^{gw} = c_{\text{I}}^k / c_{\text{II}}^w$  kleiner als Eins ist, so wird die gebrochene Wirbelfront ebenfalls der einfallenden Front an der Trennungsebene vorauslaufen und Kopfwellen ausstrahlen. Von diesen sind jedoch nur die beiden Kopfwellen im 1. Medium reell, während die Kompressionskopfwelle im 2. Medium wegen  $c_{\text{II}}^k > c_{\text{II}}^w$  komplex wird. Dies hat ebenso wie bei den totalreflektierten Frontbereichen 1. Ordnung zur Folge, daß die Normalableitungen der Spannungen und Geschwindigkeiten auf den beiden Kopfwellen im 1. Medium logarithmisch singulär werden. Als Bestätigung hierfür findet man in den Knallwellenaufnahmen von O. v. SCHMIDT, daß die Kopfwellen der gebrochenen Wirbelfronten stets wesentlich stärker als die der gebrochenen Kompressionsfronten erscheinen. Auf die Berechnung der Kopfwellen, die sich nicht wesentlich von der Berechnung der Kopfwellen der gebrochenen Kompressionsfront unterscheidet, wird hier verzichtet.

Zur Eindeutigkeit der ermittelten Unstetigkeitsflächen sei abschließend bemerkt, daß sich diese unschwer aus der Eindeutigkeit der gesamten reflektierten und gebrochenen Störungsfelder bei einem im ganzen Medium I vorgegebenen einfallenden Störungsfeld folgern läßt.



Als Zahlenbeispiel sind die drei Kopfwellen berechnet worden, die bei der Totalreflexion einer kugelförmigen Kompressionsfront an der Trennungsebene zwischen Deckgebirge (Medium I) und Granit (Medium II) entstehen. Nach den Angaben von II. BLUT [12] gelten für die Schallgeschwindigkeiten und Dichten dieser Medien:

$$\begin{aligned} \text{Deckgebirge: } c_I^k &= 3,5 \text{ km/sec, } c_I^w = 2,0 \text{ km/sec, } \varrho_I = 2,45 \text{ grm/cm}^3, \\ \text{Granit: } c_{II}^k &= 5,9 \text{ km/sec, } c_{II}^w = 3,4 \text{ km/sec, } \varrho_{II} = 2,70 \text{ grm/cm}^3, \\ \text{so daß } n^{rw} &= 1,75, n^{gk} = 0,593, n^{gw} = 1,03 \text{ und } \gamma = 1,10. \end{aligned}$$

In Bild 1 sind die Fronten bei einem Radius  $R = 10h$  der einfallenden Front aufgezeichnet. Die Unstetigkeiten der Normalableitungen der Spannungen auf den Kopfwellen sind in den Bildern 3, 4 und 5 über dem Parameter  $\tilde{r}$  aufgetragen. Die Größen sind durch  $h$  und den Spannungssprung  $[\sigma_{nn}^{ek}]_h$  der einfallenden Front bei  $R = h$  dimensionslos gemacht.

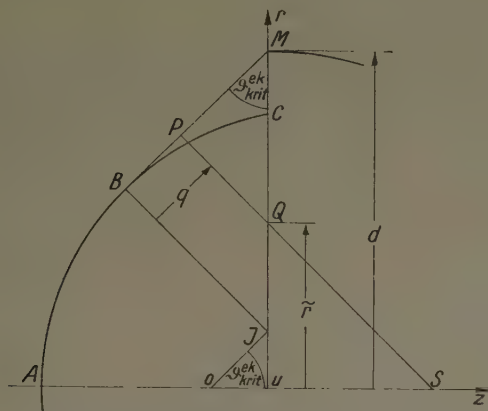


Bild 2. Die Kopfwellen BM an der reflektierten Kompressionsfront ABC

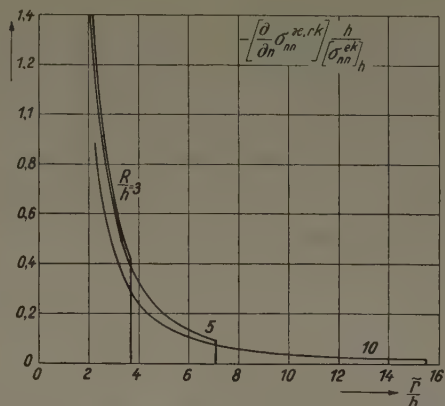


Bild 3. Die Unstetigkeit zweiter Ordnung auf der Kompressionskopfwellen MB im Medium I (Deckgebirge)

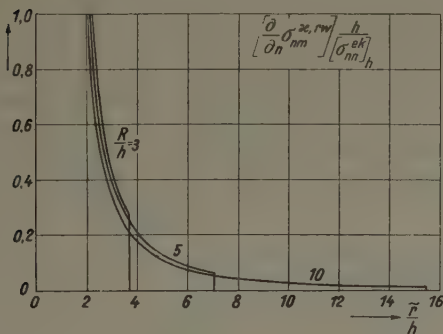


Bild 4. Die Unstetigkeit zweiter Ordnung auf der Wirbelkopfwellen MH im Medium I (Deckgebirge)

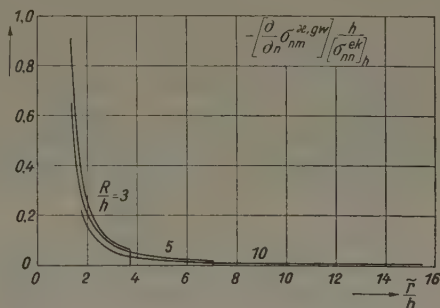


Bild 5. Die Unstetigkeit zweiter Ordnung auf der Wirbelkopfwellen MF im Medium II (Granit)

## V. Zusammenfassung der Ergebnisse

Bei der Totalreflexion kugelförmiger Stoßfronten lassen sich einige allgemeine, durch die Formen der Stoßfronten bedingte Gesetzmäßigkeiten feststellen: Auf den näherungsweise kugelförmigen Fronten 1. Ordnung klingen die Unstetigkeiten etwa umgekehrt proportional dem Frontradius ab. Auf den kegelförmigen Kopfwellen hingegen klingen die Unstetigkeiten 2. Ordnung nur wie  $a^{-1/2}$  ab, wo  $a$  der von der  $z$ -Achse längs eines Strahls zurückgelegte Weg ist. In tangentialer Richtung ändern sich die Unstetigkeiten auf den Kopfwellen wie  $q^{-2}$  für kleine und wie  $q^{-3/2}$  für große MACHsche Winkel  $\vartheta^{*,i}$  zwischen Kopfwellen und Trennungsebene, wo  $q$  der Abstand vom kritischen Strahl ist (siehe Bild 2).

Mit geringen Änderungen lassen sich die Ergebnisse für den Fall einer einfallenden kugelförmigen Kompressionsfront auch auf den Fall einer einfallenden Zylinderfront übertragen. Die Unstetigkeiten auf den Fronten 1. Ordnung klingen in diesem Fall nur noch umgekehrt proportional der Wurzel der Radien ab, während die Unstetigkeiten auf den ebenen Kopfwellen in Fortschrittsrichtung konstant bleiben. Tangential zur Kopfwellen ändern sich die Unstetigkeiten unabhängig vom MACHschen Winkel näherungsweise wie  $q^{-3/2}$ .

## Literatur

- [1] O. v. SCHMIDT, Über Knallwellenausbreitung in Flüssigkeiten und festen Körpern, Phys. Zeitschr. **39** (1938), S. 864—874.
- [2] H. OTT, Reflexion und Brechung von Kugelwellen; Effekte zweiter Ordnung, Ann. d. Phys. **41** (1942), S. 433—466.
- [3] H. OTT, Die Sattelpunktmethode in der Umgebung eines Pols mit Anwendungen auf die Wellenoptik und Akustik, Ann. d. Phys. **43** (1943), S. 393—403.
- [4] E. GERJUOY, Refraction of Waves from a Point Source into a Medium of Higher Velocity, Phys. Rev **73** (1948), S. 1442—1449.
- [5] E. GERJUOY, Total Reflection of Waves from a Point Source, Comm. Pure and Appl. Maths. **6** (1953), S. 73—91.
- [6] G. JOOS, J. TELTOW, Abhandlung zur Deutung der Knallenwellenausbreitung an der Grenzschicht zweier Medien, Phys. Zeitschr. **40** (1939), S. 289—293.
- [7] H. MUSKAT, Theory of Refraction Shooting, Physics **4** (1933), S. 14—28.
- [8] F. SAUTER, Der flüssige Halbraum bei einer mechanischen Beeinflussung seiner Oberfläche, ZAMM **30** (1950), S. 149—153;  
Der elastische Halbraum bei einer mechanischen Beeinflussung seiner Oberfläche, ZAMM **30** (1950), S. 203—215.
- [9] J. NITSCHKE, Über die Fortpflanzung kleiner Störungen in flüssigen Medien, betrachtet als Ausbreitungsvorgang von Unstetigkeiten in den Lösungen der Bewegungsdifferentialgleichungen, ZAMM **34** (1954), S. 361—373.
- [10] R. COURANT, D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. II, Berlin 1937: Springer-Verlag.
- [11] F. G. FRIEDLÄNDER, Solutions of the Wave Equations with Discontinuous Derivatives, Proc. Camb. Phil. Soc. **38** (1942), S. 378—382.
- [12] H. BLUT, Ein Beitrag zur Theorie der Reflexion und Brechung elastischer Wellen an Unstetigkeitsflächen, Z. f. Geophys. **8** (1932), S. 130—144.

Manuskripteingang: 5. 11. 1959

Anschrift: Dr. K. HASSELMANN, Hamburg 21, Brucknerstr. 25a

ZAMM **40** (1960) Heft 10/11, Seite 472—482

## Einige gemischte Randbedingungen anisotroper Platten

Von JOZEF BRILLA

*Es wird eine unendliche elastische anisotrope Halbplatte  $y > 0$  mit gemischten Randbedingungen untersucht. Die Halbplatte ist am Rande abwechselnd eingespannt und frei drehbar gelagert. Mit Hilfe der allgemeinen Lösung einer unendlichen anisotropen Halbplatte mit am Rande gegebenen ersten Ableitungen der Durchbiegung, die mittels des Verfahrens der Fourierintegrale gegeben ist, wird eine singuläre Integralgleichung für diese Randbedingungen abgeleitet. Nach der Zurückführung des Problems auf die Hilbert-Riemannsche Aufgabe werden die allgemeine Lösung für  $n$  Abschnitte des frei drehbar gelagerten Randes und die Lösungen für verschiedene Belastungsfälle der Halbplatte mit einem frei drehbar gelagerten Abschnitt des Randes untersucht.*

*Some mixed boundary value problems of a semi-infinite elastic anisotropic plate  $y > 0$  are analysed. The plate is simply supported along a part of its boundary and clamped along the remainder. From a general solution of a semi-infinite anisotropic plate obtained by the method of Fourier integrals, where the first derivatives of the transverse displacement are given along the edge, a singular integral equation is derived for that boundary value problem. After reduction of the singular integral equation to the Hilbert-Riemann problem the general solution for  $n$  sections of the simply supported edge and solutions of various cases of loading of a semi-infinite plate with one simply supported edge are given.*

Исследуется смешанная задача изгиба полубесконечной упругой анизотропной пластинки  $y > 0$ , когда часть края пластинки заделана, а остальная часть оперта. При помощи решения изгиба полупластинки при заданных на краю первых производных изгиба определенного интегралами Фурье, строится сингулярное интегральное уравнение для этой смешанной задачи. После перевода интегрального уравнения к задаче Гильберта — Римана дается общее решение для пластинки с  $n$  участками опертого края и решения различных случаев нагрузки пластинки с одним опертым участком.

## 1. Einleitung

In der letzten Zeit wird der Lösung dünner isotroper Platten mit gemischten Randbedingungen verhältnismäßig große Aufmerksamkeit gewidmet. Bei der Lösung kann man verschiedene Verfahren verfolgen. Die Aufgabe kann auf die Lösung der FREDHOLMSchen Integralgleichung [6], [8], [12], [13] oder auf die Lösung von singulären Integralgleichungen [7], [10], [14] zurückgeführt werden. Die Methode der komplexen Veränderlichen unter direkter Zurückführung auf die HILBERT-RIEMANNsche Aufgabe wurde in den Arbeiten [3], [4] angewandt.

Mit gemischten Randbedingungen für anisotrope Platten befaßten sich G. M. L. GLADWELL [5] und H. ZORSKI [15]. Letztgenannter beschränkt seine Untersuchungen auf orthotrope Platten.



In der vorliegenden Arbeit werden wir uns mit der Lösung gemischter Randbedingungen einer dünnen anisotropen Halbplatte  $y > 0$  mit wechselseitig eingespannten und frei drehbar gelagerten Rändern und mit der Anwendung FOURIERScher Integrale beschäftigen.

## 2. Unendliche anisotrope Halbplatte

Wir untersuchen die Durchbiegung einer unendlichen anisotropen Halbplatte  $y > 0$  (Bild 1), wenn entlang des Randes den DIRICHLETSchen Bedingungen genügende erste Ableitungen der Durchbiegung

$$w_s(x) = \left[ \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right]_{y=0}, \quad w_n(x) = \left[ \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right]_{y=0} \quad \dots \quad (2.1)$$

gegeben sind.

Die Lösung soll in den inneren Punkten der Halbplatte die homogene Gleichung anisotroper Platten

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4 D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4 D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \quad (2.2)$$

und an den Rändern die Randbedingungen (2.1) erfüllen.

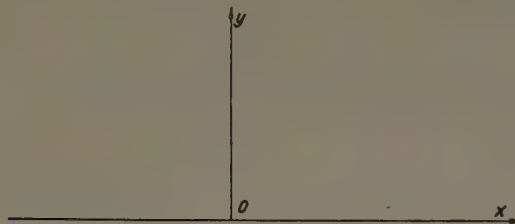


Bild 1

Die Randbedingungen werden mittels FOURIERScher Integrale ausgedrückt. Da die Deformationen reelle Größen sind, gelten die Gleichungen (siehe [1])

$$w_s(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \psi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad w_n(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \chi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \quad \dots \quad (2.3),$$

wo

$$\psi(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty w_s(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi, \quad \chi(\lambda) = \int_{-\infty}^\infty w_n(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi \quad \dots \quad (2.4).$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung der Platte (2.2) wird in der Form des FOURIERSchen Integrals

$$w = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^\infty \tilde{w}(\lambda, y) e^{i\lambda x} d\lambda \quad \dots \quad (2.5)$$

gesucht.

Nach Einsetzen in die homogene Gleichung der anisotropen Platte erhalten wir für  $\tilde{w}(\lambda, y)$  die gewöhnliche Differentialgleichung

$$D_{22} \tilde{w}^{IV} + 4 i \lambda D_{26} \tilde{w}''' - 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \lambda^2 \tilde{w}'' - 4 i \lambda D_{16} \lambda^3 \tilde{w}' + D_{11} \lambda^4 \tilde{w} = 0 \quad (2.6).$$

Die Lösung dieser Gleichung wird in der exponentiellen Form

$$\tilde{w} = A e^{i\lambda \mu y} \quad \dots \quad (2.7)$$

angestrebt.

Nach dem Einsetzen in (2.6) erhalten wir folgende charakteristische Gleichung

$$D_{22} \mu^4 + 4 D_{26} \mu^3 + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \mu^2 + 4 D_{16} \mu + D_{11} = 0 \quad \dots \quad (2.8),$$

welche mit der charakteristischen Gleichung der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung der Platte [9] übereinstimmt.

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung der aus beliebigem homogenen Material bestehenden Platten können, wie S. G. LECHNICKIJ bewiesen hat, nicht reell sein. Da die Gleichung (2.8) reelle Koeffizienten hat, sind dann die Wurzeln paarweise komplex konjugiert. Komplexe oder rein imaginäre Zahlen  $\mu_1 = \alpha_1 + i \beta_1$ ,  $\mu_2 = \alpha_2 + i \beta_2$  bezeichnen wir als komplexe Parameter der Platte.  $\mu_1, \mu_2$  werden so gewählt, daß  $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$  ist, was immer möglich ist.

Die Wurzeln  $\mu$  können entweder verschieden ( $\mu_1 \neq \mu_2$ ) oder zweifach ( $\mu_1 = \mu_2$ ) sein. Für verschiedene Wurzeln erhält man:

$$\tilde{w} = A e^{i\lambda\mu_1 y} + B e^{i\lambda\mu_2 y} + C e^{i\lambda\bar{\mu}_1 y} + D e^{i\lambda\bar{\mu}_2 y} \dots \dots \dots (2.9),$$

wo  $A, B, C, D$  Funktionen  $\lambda$  darstellen.

Für gleiche Wurzeln erhalten wir:

$$\tilde{w} = (A + B y) e^{i\lambda\mu_1 y} + (C + D y) e^{i\lambda\bar{\mu}_1 y} \dots \dots \dots (2.10).$$

Die Lösungen für orthotrope Platten erhalten wir nach Einsetzen  $D_{16} = D_{26} = 0$  und der entsprechenden Werte für  $\mu$ .

Da die Lösung des Problems für gleiche Wurzeln durch die Modifikation — affine Abbildung der Lösung für isotrope Platten [3], [14] — erhalten werden kann, untersuchen wir nur die Lösung für verschiedene Wurzeln.

Für die Halbplatte  $y > 0$ , wo  $w_n(x)$ ,  $w_s(x)$  die DIRICHLETSchen Bedingungen erfüllen, werden wir voraussetzen, daß  $\frac{\partial w}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial y}$  für  $y = \infty$  gleich Null sind. Dann können wir nur die Glieder mit  $\text{Re}\{i\lambda\mu\} < 0$  benützen.

Nach dem Einsetzen in die Gleichung (2.5) erhalten wir:

$$w = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_0^\infty (A e^{i\lambda z_1} + B e^{i\lambda z_2}) d\lambda \dots \dots \dots (2.11),$$

wo  $z_1 = x + \mu_1 y$ ,  $z_2 = x + \mu_2 y$ .

Wenn wir  $A, B$  aus den Randbedingungen (2.1) ausrechnen, erhalten wir:

$$w = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left[ \int_0^\infty \frac{\psi(\lambda)}{\lambda} (\mu_2 e^{i\lambda z_1} - \mu_1 e^{i\lambda z_2}) d\lambda - \int_0^\infty \frac{\chi(\lambda)}{\lambda} (e^{i\lambda z_1} - e^{i\lambda z_2}) d\lambda \right] \right\} \quad (2.12).$$

Die daraus sich ergebenden Formeln für die Durchbiegung erhalten wir nach Einsetzen für  $\psi(\lambda)$ ,  $\chi(\lambda)$  entsprechend (2.4) und Integration. Das Integral (2.12) muß nicht im normalen Sinne existieren. Im Sinne der Distributionstheorie können wir ihm aber solche Bedeutung geben, daß wir alle Operationen vornehmen können, als ob es im normalen Sinne existierte. Nach Einsetzen für  $\psi(\lambda)$ ,  $\chi(\lambda)$  und nach Änderung der Integrationsreihenfolge erhält man:

$$w = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left( \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \int_{-\infty}^\infty w_s(\xi) d\xi \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} [\mu_2 e^{i\lambda(z_1 - \xi)} - \mu_1 e^{i\lambda(z_2 - \xi)}] d\lambda - \int_{-\infty}^\infty w_n(\xi) d\xi \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} [e^{i\lambda(z_1 - \xi)} - e^{i\lambda(z_2 - \xi)}] d\lambda \right\} \right) \dots \dots \dots (2.13).$$

Nach Differentiation nach  $x$  (bzw. nach  $y$ ) und Integration nach  $\lambda$  erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left[ \int_{-\infty}^\infty w_s(\xi) \left( \frac{\mu_2}{\xi - z_1} - \frac{\mu_1}{\xi - z_2} \right) d\xi - \int_{-\infty}^\infty w_n(\xi) \left( \frac{1}{\xi - z_1} - \frac{1}{\xi - z_2} \right) d\xi \right] \right\}, \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left[ \int_{-\infty}^\infty \mu_1 \mu_2 w_s(\xi) \left( \frac{1}{\xi - z_1} - \frac{1}{\xi - z_2} \right) d\xi - \int_{-\infty}^\infty w_n(\xi) \left( \frac{\mu_1}{\xi - z_1} - \frac{\mu_2}{\xi - z_2} \right) d\xi \right] \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.14).$$

In diesen Formeln kommen CAUCHYSche Integrale für die obere Halbebene vor. Wenn wir die Bezeichnungen

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z_1) &= \frac{1}{2\pi i (\mu_2 - \mu_1)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mu_2 w_s(\xi) - w_n(\xi)}{\xi - z_1} d\xi, \\ \Psi(z_2) &= -\frac{1}{2\pi i (\mu_2 - \mu_1)} \int_{-\infty}^\infty \frac{\mu_1 w_s(\xi) - w_n(\xi)}{\xi - z_2} d\xi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.15)$$



eingeführen, gilt

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2 \operatorname{Re} \{ \Phi(z_1) + \Psi(z_2) \}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 2 \operatorname{Re} \{ \mu_1 \Phi(z_1) + \mu_2 \Psi(z_2) \} \quad \dots (2.16).$$

$\Phi(z_1)$ ,  $\Psi(z_2)$  sind in den Ebenen  $z_1$  bzw.  $z_2$  holomorphe Funktionen. Daraus ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} m_x &= -2 \operatorname{Re} [p_1 \Phi'(z_1) + p_2 \Psi'(z_2)], \\ m_y &= -2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi'(z_1) + q_2 \Psi'(z_2)], \\ m_{xy} &= -2 \operatorname{Re} [r_1 \Phi'(z_1) + r_2 \Psi'(z_2)], \\ q_x &= -2 \operatorname{Re} [\mu_1 s_1 \Phi''(z_1) + \mu_2 s_2 \Psi''(z_2)], \\ q_y &= 2 \operatorname{Re} [s_1 \Phi''(z_1) + s_2 \Psi''(z_2)] \end{aligned} \right\} \dots (2.17),$$

wo:

$$\left. \begin{aligned} p_i &= D_{11} + D_{12} \mu_i^2 + 2 D_{16} \mu_i, \\ q_i &= D_{12} + D_{22} \mu_i^2 + 2 D_{26} \mu_i, \\ r_i &= D_{16} + D_{26} \mu_i^2 + 2 D_{66} \mu_i, \\ s_i &= \frac{D_{11}}{\mu_i} + 3 D_{16} + (D_{12} + 2 D_{66}) \mu_i + D_{26} \mu_i^2, \\ s_i - r_i &= \frac{p_i}{\mu_i}, \quad s_i + r_i = -q_i \mu_i, \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \right\} \dots (2.18).$$

Nach Integration (2.14) und unter Vernachlässigung der Integrationskonstante erhalten wir:

$$w = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left( \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w_s(\xi) [\mu_2 \ln(z_1 - \xi) - \mu_1 \ln(z_2 - \xi)] d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} w_n(\xi) [\ln(z_1 - \xi) - \ln(z_2 - \xi)] d\xi \right\} \right) \dots (2.19).$$

Gleicherweise können wir auch die Lösungen einer unendlichen anisotropen Halbplatte für weitere zwei Typen von Randbedingungen der Platten [2] erhalten.

### 3. Gemischte Randbedingungen

Im weiteren werden wir eine Halbplatte  $y > 0$  mit gemischten Randbedingungen untersuchen. Es wird vorausgesetzt, daß der Rand der Halbplatte in den Abschnitten  $L = \bigcup_{j=1}^p L_j = \bigcup_{j=1}^p [a_j, b_j]$  (Bild 2) frei drehbar gelagert ist oder daß dort Momente  $m_y$  gegeben sind. Entlang des übrigbleibenden Randes  $C$  ist die Halbplatte eingespannt.

Dann können wir schreiben:

$$w = 0, \quad w_n = 0 \quad \text{in } C \quad \dots (3.1)$$

und ebenso:

$$w = 0, \quad m_y = m(x) \quad \text{in } L \quad \dots (3.2).$$

Damit wir mittels der Formeln (2.12) die Durchbiegung der Halbplatte ausdrücken können, ersetzen wir die Bedingung  $w = 0$  durch die Bedingung  $w_s = 0$ ; außerdem ist es notwendig, die unbekannte Funktion  $w_n$  auf  $L$  zu bestimmen. Wenn wir aus der Formel (2.14) die Randwerte für

$$f(x) = -\int m(x) dx - c_j \quad \dots (3.3)$$

ausdrücken, erhalten wir nach Anwendung der Beziehungen bzw. der Bezeichnungen:

$$\operatorname{Re} \frac{q_1 - q_2}{\mu_1 - \mu_2} = 0, \quad A = \operatorname{Im} \frac{q_1 - q_2}{\mu_1 - \mu_2} = D_{22} (\beta_1 + \beta_2) \quad \dots (3.4)$$

und entsprechend den PLEMELJSchen Formeln [11] für die Grenzwerte des CAUCHYSchen Integrals eine singuläre Integralgleichung erster Art

$$\frac{A}{\pi} \int_L \frac{w_n(\xi)}{\xi - x} d\xi = f(x) \quad \dots (3.5),$$

für die Bestimmung der unbekannten Funktion  $w_n(x)$  auf  $L$ . Die Konstanten  $c_j$  sind für verschiedene Intervalle  $L_j$  verschieden.

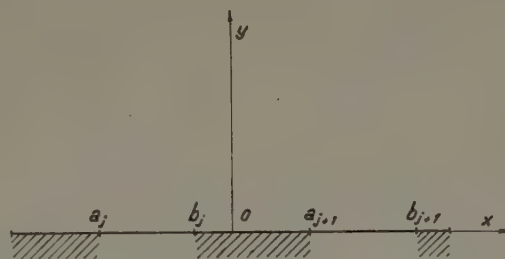


Bild 2

Zur Lösung dieser Integralgleichung führen wir die teilweise holomorphe Funktion

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w_n(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (3.6)$$

ein. Diese Funktion ist holomorph in der ganzen Ebene  $z$  außer  $L$  d. h. mit Ausnahme der Schnitte  $L_j$ . Für  $z$  kann beliebig eine der beiden komplexen Veränderlichen  $z_1$  und  $z_2$  eingesetzt werden.

Laut PLEMELJS Formeln gilt:

$$\left. \begin{aligned} w_n(x) &= F^+(x) - F^-(x), \\ \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{w_n(\xi)}{\xi - x} d\xi &= F^+(x) + F^-(x) \end{aligned} \right\} \quad (3.7).$$

Nach Einsetzen in die Gleichung (3.5) erhalten wir:

$$F^+(x) + F^-(x) = -\frac{i}{A} f(x) \quad (3.8).$$

So erhalten wir eine nicht-homogene HILBERT-RIEMANNSCHE Aufgabe. Da die Durchbiegung  $w$  und ihre ersten Derivationen stetig sein sollen, soll die Lösung endliche Werte (in unserem Falle Nullwerte) in den Endpunkten der Intervalle  $L(a_j, b_j)$  haben, und nach (2.14) sollte sie gleich Null im Unendlichen sein. Durch die Lösung bekommen wir

$$F(z) = -\frac{X(z)}{2\pi A} \int_L \frac{f(\xi)}{X^+(\xi)(\xi - z)} d\xi + P(z) X(z) \quad (3.9),$$

wo

$$X(z) = \prod_{j=1}^p \sqrt{(z - a_j)(z - b_j)} \quad (3.10)$$

und  $P(z)$  ein beliebiges Polynom in  $z$  ist.

Damit die Funktion  $F(z)$  gleich Null im Unendlichen sei, müssen wir  $P(z) = 0$  setzen. Außerdem soll gelten

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\xi^{k-1} f(\xi)}{X^+(\xi)} d\xi = 0 \quad (3.11),$$

für  $k = 1, 2, \dots, p$ , woraus sich  $p$  Gleichungen zur Bestimmung von  $p$  Konstanten ergeben.

Für die unbekannte Funktion  $w_n(x)$  bekommt man nach den Gleichungen (3.7) und (3.8)

$$w_n(x) = \frac{i}{A} f(x) + 2 F^+(x) \quad (3.12)$$

oder nach Anwendung der Gleichungen (3.9)

$$w_n(x) = -\frac{X(x)}{\pi A} \int_L \frac{f(\xi)}{X^+(\xi)(\xi - x)} d\xi \quad (3.13),$$

was die Bedingung der Stetigkeit der ersten Derivationen  $w$  erfüllt.

Zur Berechnung der Momente und Schubkräfte im Innern der Halbplatte bestimmen wir die Funktionen  $\Phi(z_1)$  und  $\Psi(z_2)$ . Durch Vergleich von (2.15) mit (3.6) erhalten wir:

$$\Phi(z_1) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} F(z_1), \quad \Psi(z_2) = -\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} F(z_2) \quad (3.14).$$

Die Funktion  $F(z)$  ergibt also eine Lösung des Problems auch im Innern der Halbplatte.

#### 4. Die Halbplatte mit einem frei drehbar gelagerten Abschnitt

Wir werden eine eingespannte Halbplatte  $y > 0$  mit einem frei drehbar unterstützten Abschnitt  $(a, b)$  untersuchen. Entsprechend (3.9) erhalten wir

$$F(z) = -\frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi A} \int_a^b \frac{f(\xi)}{\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}(\xi-z)} d\xi \quad (4.1).$$



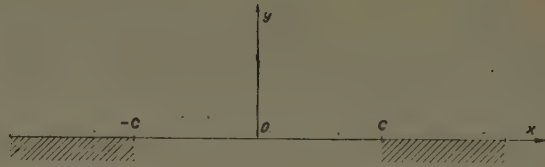
Eine auf einem frei-drehbar unterstützten Abschnitt mit einem konstanten Moment  $m$  belastete Platte. Wir werden nun eine auf einem frei-drehbar gelagerten Abschnitt mit einem konstanten Moment  $m$  belastete Halbplatte untersuchen. Den Nullpunkt des Koordinatensystems ohne Begrenzung der Allgemeinheit wählen wir in der Mitte des frei drehbar unterstützten Abschnittes ( $-c, c$ ) (Bild 3).

Nach (3.3) bekommen wir

$$f(x) = -mx - c_1 \quad \dots (4.2)$$

und nachher

$$F(z) = \frac{\sqrt{z^2 - c^2}}{2\pi A} \int_{-c}^c \frac{m\xi + c_1}{\sqrt{\xi^2 - c^2}(\xi - z)} d\xi \quad (4.3),$$



woraus sich nach der Integration ergibt:

$$F(z) = \frac{i}{2A} (mz + c_1 - m\sqrt{z^2 - c^2}) \quad (4.4).$$

Aus der Bedingung des Nullwertes der Funktion  $F(z)$  im Unendlichen erhalten wir  $c_1 = 0$ . Die Konstante  $c_1$  hat, auch wenn sie keinen Nullwert besäße, keinen Einfluß auf die Verteilung der Momente und der Schubkräfte. Da in diesem Falle nur die Berechnung dieser Größen angestrebt wird, brauchen wir sie nicht zu bestimmen.

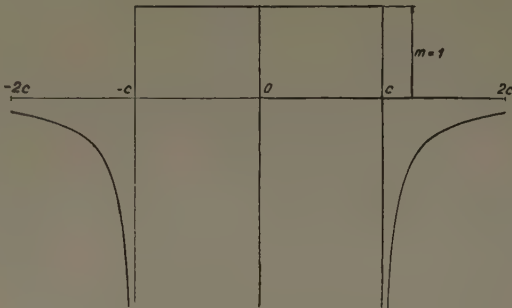


Bild 3

Am Rande erhalten wir nach (3.12)

$$w_n(x) = \frac{m}{A} \sqrt{c^2 - x^2} \quad \dots (4.5),$$

d. h. die Stetigkeitsbedingung der ersten Ableitungen der Durchbiegung in den Endpunkten des frei drehbar gelagerten Abschnittes ist automatisch erfüllt.

Im Innern erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(z_1) &= \frac{i m}{2A(\mu_1 - \mu_2)} (z_1 - \sqrt{z_1^2 - c^2}), \\ \Psi(z_2) &= -\frac{i m}{2A(\mu_1 - \mu_2)} (z_2 - \sqrt{z_2^2 - c^2}) \end{aligned} \right\} \dots (4.6).$$

Die Beziehungen für Momente und Schubkräfte ergeben sich aus (2.17). Am Rande  $y = 0$  für  $|x| > c$  erhält man:

$$\begin{aligned} m_y &= m \left( 1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - c^2}} \right), & m_{xy} &= m \frac{D_{26}}{D_{22}} \left( 1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - c^2}} \right), \\ q_y &= - \left[ \frac{1}{2} (\alpha_1 + \alpha_2) + \frac{\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \right] \frac{c^2 \operatorname{sign} x}{(x^2 - c^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Für eine orthotrope Halbplatte gilt dann

$$\begin{aligned} m_y &= m \left( 1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2 - c^2}} \right), \\ m_{xy} &= 0, \quad q_y = 0. \end{aligned}$$

Diese Lösung gilt für alle Punkte außer den irregulären. Der Charakter der Singularität ist ähnlich wie bei der anisotropen Halbebene mit einer gemischten Randbedingung [1] d. h. bei der anisotropen Halbebene, gedrückt durch einen starren Körper unter Vernachlässigung der Reibungskräfte zwischen diesem Körper und der Halbebene. Im Bild 3 ist der berechnete Verlauf des Biegemomentes  $m_y$  aufgetragen.

Die mit einem Einzelmoment  $M$  belastete Halbplatte. Im weiteren werden wir uns mit der Untersuchung einer im Punkt  $\xi_0$  des frei drehbar gelagerten Abschnittes  $(a b)$  mit einem Einzelmoment  $M$  belasteten Halbplatte befassen (Bild 4).

Im Sinne (4.1) gilt

$$F(z) = \frac{\sqrt{(z-a)(z-b)}}{2\pi A} \int_a^b \frac{M \Theta(\xi - \xi_0) + c_1}{\sqrt{(\xi-a)(\xi-b)(\xi-z)}} d\xi \quad (4.7),$$

wo

$$\Theta(\xi - \xi_0) = \int \delta(\xi - \xi_0) d\xi.$$

Nach der Integration und nach der Ermittlung der Konstante  $c_1$  erhalten wir

$$F(z) = \frac{M}{2\pi A} \ln \frac{[\sqrt{(z-a)(\xi_0-b)} + \sqrt{(z-b)(\xi_0-a)}]^2}{(z-\xi_0)[\sqrt{\xi_0-a} + \sqrt{\xi_0-b}]^2} \quad (4.8).$$

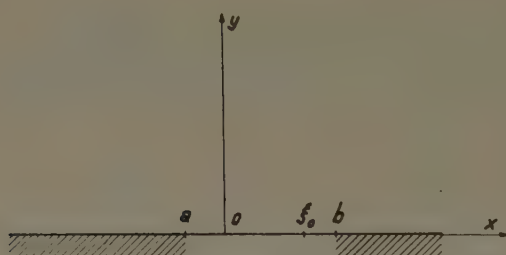


Bild 4

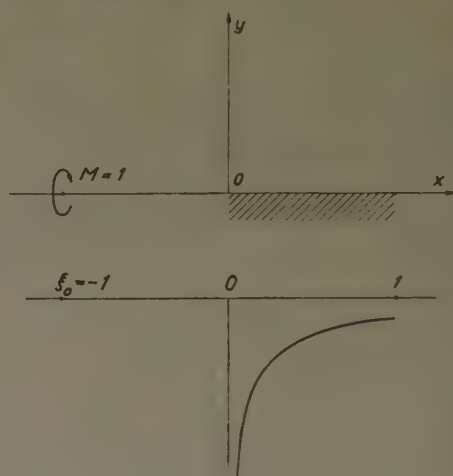


Bild 5

Am Rande gilt

$$w_n(x) = \frac{M}{\pi A} \ln \frac{[\sqrt{(x-a)(b-\xi_0)} + \sqrt{(b-x)(\xi_0-a)}]^2}{|x-\xi_0|(b-a)} \quad (4.9).$$

Durch die Differentiation von (4.8) nach  $z$  erhalten wir

$$F'(z) = -\frac{i M}{2\pi A} \frac{\sqrt{(\xi_0-a)(b-\xi_0)}}{(z-\xi_0)\sqrt{(z-a)(z-b)}} \quad (4.10).$$

Infolgedessen wird

$$\left. \begin{aligned} \Phi'(z_1) &= -\frac{i M}{2\pi A (\mu_1 - \mu_2)} \frac{\sqrt{(\xi_0-a)(b-\xi_0)}}{(z_1-\xi_0)\sqrt{(z_1-a)(z_1-b)}}, \\ \Psi'(z_2) &= \frac{i M}{2\pi A (\mu_1 - \mu_2)} \frac{\sqrt{(\xi_0-a)(b-\xi_0)}}{(z_2-\xi_0)\sqrt{(z_2-a)(z_2-b)}} \end{aligned} \right\} \quad (4.11).$$

Für das Biegemoment  $m_y$  am Rande außerhalb des Abschnittes  $(a b)$  gilt dann

$$m_y = -\frac{M}{\pi} \frac{\sqrt{(\xi_0-a)(b-\xi_0)}}{|x-\xi_0|\sqrt{(x-a)(x-b)}} \quad (4.12).$$

Im Sonderfalle, wenn die Halbplatte für  $x < 0$  frei drehbar gelagert und für  $x > 0$  eingespannt ist, bekommen wir für den eingespannten Abschnitt:

$$m_y = -\frac{M}{\pi} \frac{1 - \xi_0}{(x - \xi_0)\sqrt{x}}.$$

Der Verlauf der Biegemomente  $m_y$  (Bild 5) ist ähnlich wie der für die isotrope Platten [14].



### 5. Die in einem inneren Punkte belastete Halbplatte

Oft interessieren wir uns nicht für die Deformationen der Platte, sondern den Verlauf der Biege- und Drehmomente, sowie der Schubkräfte. In diesem Falle ist es vorteilhaft, die singuläre Integralgleichung zu modifizieren. Durch die Differentiation dieser Gleichung nach  $x$  und Integration der linken Seite nach  $\xi$  bekommen wir

$$\frac{A}{\pi} \int_L \frac{w'_n(\xi)}{\xi - x} d\xi = -m(x) \quad \dots \quad (5.1),$$

also eine singuläre Integralgleichung erster Art für die Bestimmung der unbekannten Funktion  $w'_n(x)$  auf  $L$ .

Wir führen jetzt eine teilweise holomorphe Funktion ein

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w'_n(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \dots \quad (5.2),$$

welche in der ganzen Ebene außer  $L$  holomorph ist. Die Funktion  $F'(z)$  ist die Ableitung der Funktion  $F(z)$  aus (3.6), wie es mit Rücksicht auf die in den Endpunkten  $L$  geltenden Nullwerte  $w_n(x)$  beweisbar ist.

Nach Zurückführung dieses Problems auf die HILBERT-RIEMANNsche Aufgabe durch die Lösung für einen Abschnitt der freien Unterstützung  $L = (a, b)$  ergibt sich:

$$F'(z) = \frac{1}{2\pi A} \frac{1}{(z-a)(z-b)} \int_a^b \frac{m(\xi) \sqrt{(\xi-a)(\xi-b)}}{\xi-z} d\xi \quad \dots \quad (5.3).$$

Es gilt dann ebenso wie (3.14)

$$\Phi'(z_1) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} F'(z_1), \quad \Psi'(z_2) = -\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} F'(z_2) \quad \dots \quad (5.4).$$

Die in einem inneren Punkte durch eine Einzelkraft belastete Halbplatte. Wir werden jetzt die Halbplatte  $y > 0$ , welche im Punkte  $x = \xi_0$ ,  $y = \eta_0$  (Bild 6) durch eine Einzelkraft  $P$  belastet ist, untersuchen. Der Rand der Halbplatte soll in  $C$  eingespannt und in  $L(a, b)$  frei drehbar unterstützt sein, d. h.:

$$\left. \begin{aligned} w &= 0, & w_n &= 0 & \text{in } C, \\ w &= 0, & m_y &= 0 & \text{in } L \end{aligned} \right\} \quad (5.5).$$

Die Lösung werden wir in der Form

$$w = w_0 + w_1 \quad \dots \quad (5.6)$$

suchen, wo  $w_0$  die Lösung einer entlang des ganzen Randes eingespannten und im Punkt  $\xi_0, \eta_0$  durch eine Kraft  $P$  belasteten Halbplatte ist, während  $w_1$  eine solche Ergänzungslösung vorstellt, daß  $w_0 + w_1$  die Randbedingungen (5.5) erfüllt.

Für  $w_0$  gilt nach [2]

$$w_0 = -\frac{P}{2\pi D_{22}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{i=1}^2 A_i \left( z_{i0}^2 \ln z_{i0} - \frac{3}{2} z_{i0}^2 \right) + \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 C_{ik} \left( z_{ik}^2 \ln z_{ik} - \frac{3}{2} z_{ik}^2 \right) \right\} \quad (5.7),$$

wo:

$$A_1 = \frac{1}{(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_1)(\mu_1 - \mu_2)}, \quad A_2 = \frac{1}{(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \mu_2)} \quad (5.8);$$

$$\left. \begin{aligned} C_{11} &= -\bar{A}_1 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}, & C_{21} &= -\bar{A}_1 \frac{\mu_1 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1}, \\ C_{12} &= -\bar{A}_2 \frac{\mu_2 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}, & C_{22} &= -\bar{A}_2 \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5.9);$$

$$\left. \begin{aligned} z_{10} &= z_1 - \zeta_{10}, & z_{20} &= z_2 - \zeta_{20}, & \zeta_{10} &= \xi_0 + \mu_1 \eta_0, \\ z_{11} &= z_1 - \zeta_{10}, & z_{21} &= z_2 - \zeta_{10}, & \zeta_{20} &= \xi_0 + \mu_2 \eta_0, \\ z_{12} &= z_1 - \zeta_{20}, & z_{22} &= z_2 - \zeta_{20}, \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (5.10).$$

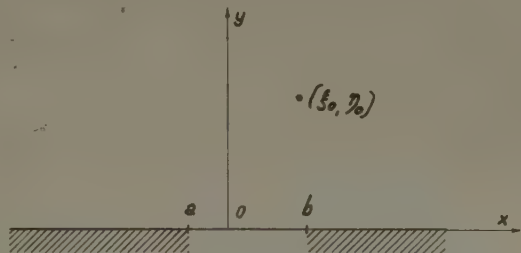


Bild 6

Auf der  $x$ -Achse erhalten wir dann

$$m_y^{(0)} = m_0(x) = \frac{P}{4\pi i} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [\ln(x - \zeta_{10}) - \ln(x - \zeta_{20})] - \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} [\ln(x - \bar{\zeta}_{10}) - \ln(x - \bar{\zeta}_{20})] \right\} \dots (5.11).$$

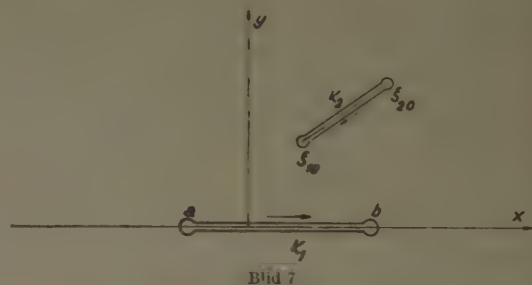
Wir können weiter zur Berechnung der ergänzenden Lösung — der durch  $w_1$  gegebenen Größen herantreten. Aus den Randbedingungen (5.5) folgt:

$$\left. \begin{array}{ll} w_1 = 0, & w_n^{(1)} = 0 \\ w_1 = 0, & m_y^{(1)} = -m_0(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{in } C \\ \text{in } L \end{array} \dots (5.12),$$

Es gilt dann

$$F_1'(z) = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z-a)(z-b)} \int_a^b m_0(\xi) \sqrt{(\xi-a)(\xi-b)} \frac{d\xi}{\xi-z} \dots (5.13).$$

Wir bezeichnen als  $K_1$  die geschlossene Kurve mit dem Schnitt  $(a, b)$  im Innern nach Bild 7, als  $K_2$  die geschlossene Kurve mit dem Schnitt  $\zeta_{10}, \zeta_{20}$  im Inneren und setzen voraus, daß  $K = K_1 + K_2$ . Die positive Richtung des Umlaufes wird entsprechend Bild 7 gewählt. Nachdem wir zu einem Kurvenintegral übergegangen sind, haben wir:



$$F_1'(z) = -\frac{1}{4\pi i} \frac{1}{(z-a)(z-b)} \int_{K_1} m_0(\zeta) \sqrt{(\zeta-a)(\zeta-b)} \frac{d\zeta}{\zeta-z} \dots (5.14).$$

Um  $F_1'(z)$  errechnen zu können, ermitteln wir zuerst das Integral

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{G(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta \dots (5.15),$$

in dem wir die Bezeichnung

$$G(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)} [\ln(z - \zeta_{10}) - \ln(z - \zeta_{20})] \dots (5.16)$$

eingeführt haben.

$G(z)$  stellt eine im Äußeren von  $K$  holomorphe Funktion dar, welche den Pol nullter Ordnung mit einem Hauptteil  $\zeta_{20} - \zeta_{10}$  im Unendlichen hat.  $J(z)$  ist dann das CAUCHYSche Integral längs einer geschlossenen Kurve, das

$$J(z) = G(z) - \zeta_{20} + \zeta_{10} \dots (5.17)$$

gleich ist.

$J(z)$  kann auf eine andere Weise auch als Summe der Kurvenintegrale entlang  $K_1$  und  $K_2$  darstellbar sein. Es kann bewiesen werden, daß sich die Integrale längs kleiner Kreise, welche um die Punkte  $a, b, \zeta_{10}, \zeta_{20}$  herumgeführt werden, dem Wert Null nähern, wenn der Halbmesser dieser Kreise gegen Null strebt. Wenn wir als  $G^+(\zeta)$  den Grenzwert auf der linken Seite und  $G^-(\zeta)$  den Grenzwert auf der rechten Seite des Schnittes  $\zeta_{10}, \zeta_{20}$  bezeichnen, dann folgt

$$G^+(\zeta) - G^-(\zeta) = -2\pi i \sqrt{(\zeta-a)(\zeta-b)}.$$

Es gilt dann

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{G(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta - \int_{\zeta_{10}}^{\zeta_{20}} \frac{\sqrt{(\zeta-a)(\zeta-b)}}{\zeta-z} d\zeta,$$

d. h.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{G(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = G(z) - \zeta_{20} + \zeta_{10} + \int_{\zeta_{10}}^{\zeta_{20}} \frac{\sqrt{(\zeta-a)(\zeta-b)}}{\zeta-z} d\zeta \dots (5.18).$$



Wir errechnen den zweiten Teil des Integrals (5.14) ähnlich. Nach der Berechnung und Einsetzen in Gleichung (5.14) bekommt man:

$$\begin{aligned}
 F_1'(z) = & -\frac{P}{8\pi A} \left( \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \sqrt{(\zeta_{20} - a)(\zeta_{20} - b)} - \sqrt{(\zeta_{10} - a)(\zeta_{10} - b)} \right. \right. \\
 & + (2z - a - b) \ln \frac{\sqrt{\zeta_{20} - a} + \sqrt{\zeta_{20} - b}}{\sqrt{\zeta_{10} - a} + \sqrt{\zeta_{10} - b}} \left. \frac{1}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \right. \\
 & - 2 \ln \frac{\sqrt{(z - a)(\zeta_{20} - b)} + \sqrt{(z - b)(\zeta_{20} - a)}}{\sqrt{(z - a)(\zeta_{10} - b)} + \sqrt{(z - b)(\zeta_{10} - a)}} \left. \right\} \\
 & - \frac{1}{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2} \left\{ \sqrt{(\bar{\zeta}_{20} - a)(\bar{\zeta}_{20} - b)} - \sqrt{(\bar{\zeta}_{10} - a)(\bar{\zeta}_{10} - b)} \right. \\
 & + (2z - a - b) \ln \frac{\sqrt{\bar{\zeta}_{20} - a} + \sqrt{\bar{\zeta}_{20} - b}}{\sqrt{\bar{\zeta}_{10} - a} + \sqrt{\bar{\zeta}_{10} - b}} \left. \frac{1}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \right. \\
 & - 2 \ln \frac{\sqrt{(z - a)(\bar{\zeta}_{20} - b)} + \sqrt{(z - b)(\bar{\zeta}_{20} - a)}}{\sqrt{(z - a)(\bar{\zeta}_{10} - b)} + \sqrt{(z - b)(\bar{\zeta}_{10} - a)}} \left. \right\} \dots (5.19).
 \end{aligned}$$

Die Funktionen  $\Phi_1'(z_1)$ ,  $\Psi_1'(z_2)$  ergeben sich entsprechend (3.14), die Momente und Schubkräfte entsprechend (2.17). Die Endergebnisse erhalten wir als Summen beider Lösungen, d. h. der Lösung der längs des ganzen Randes eingespannten Halbplatte  $w_0$  und der ergänzenden Lösung  $w_1$ .

Die in einem inneren Punkte durch ein Einzelmoment  $M_y$  belastete Halbplatte. Wir werden die Halbplatte  $y > 0$ , welche im inneren Punkte  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  durch ein Einzelmoment  $M_y$  belastet ist, untersuchen. Die Lösung werden wir sowie im vorigen Falle in der Form der Summe  $w = w_0 + w_1$  suchen.

Entsprechend [2] gilt für eine längs des ganzen Randes eingespannten Platte

$$w_0 = \frac{M_y}{\pi D_{22}} \operatorname{Im} \left\{ \sum_{i=1}^2 \mu_i A_i (z_{i0} \ln z_{i0} - z_{i0}) - \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^2 \bar{\mu}_k C_{ik} (z_{ik} \ln z_{ik} - z_{ik}) \right\} \dots (5.20).$$

Am Rande  $y = 0$  erhalten wir dann

$$m_y^{(0)} = m_0(x) = -\frac{M_y}{2\pi i} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{x - \zeta_{10}} - \frac{\mu_2}{x - \zeta_{20}} \right) - \frac{1}{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2} \left( \frac{\bar{\mu}_1}{x - \bar{\zeta}_{10}} - \frac{\bar{\mu}_2}{x - \bar{\zeta}_{20}} \right) \right] (5.21).$$

Für die Bestimmung der aus der ergänzenden Lösung  $w_1$  sich ergebenden Größen nach (5.13) bekommt man:

$$\begin{aligned}
 F_1'(z) = & \frac{M_y}{4\pi A} \left\{ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{z - \zeta_{10}} - \frac{\mu_2}{z - \zeta_{20}} \right) - \frac{1}{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2} \left( \frac{\bar{\mu}_1}{z - \bar{\zeta}_{10}} - \frac{\bar{\mu}_2}{z - \bar{\zeta}_{20}} \right) \right. \\
 & - \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1 \sqrt{(\zeta_{10} - a)(\zeta_{10} - b)}}{z - \zeta_{10}} - \frac{\mu_2 \sqrt{(\zeta_{20} - a)(\zeta_{20} - b)}}{z - \zeta_{20}} \right) \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_2} \left( \frac{\bar{\mu}_1 \sqrt{(\bar{\zeta}_{10} - a)(\bar{\zeta}_{10} - b)}}{z - \bar{\zeta}_{10}} - \frac{\bar{\mu}_2 \sqrt{(\bar{\zeta}_{20} - a)(\bar{\zeta}_{20} - b)}}{z - \bar{\zeta}_{20}} \right) \right] \frac{1}{\sqrt{(z - a)(z - b)}} \right\} (5.22),
 \end{aligned}$$

woraus  $\Phi_1'(z_1)$  und  $\Psi_1'(z_2)$  mittels (3.14) bestimmt werden kann.

Die Biegungs- und Drehmomente, sowie auch die Schubkräfte der ganzen Lösung erhalten wir als Summen entsprechender Größen beider Lösungen  $w_0$  und  $w_1$ .

Wenn man  $\eta_0 = 0$  und  $a < \xi_0 < b$  setzt, erhält man die Lösung einer Halbplatte, belastet durch ein im Punkt  $\xi_0$  des frei drehbar unterstützten Abschnittes  $(a, b)$  wirkendes Einzelmoment  $M_y$

$$F'(z) = -\frac{i M_y}{2\pi A} \frac{\sqrt{(\xi_0 - a)(b - \xi_0)}}{(z - \xi_0) \sqrt{(z - a)(z - b)}} \dots (5.23),$$

was mit der direkt erhaltenen Lösung (4.10) übereinstimmt.

## Literatur

- [1] J. BRILLA, Anizotropické steny. Bratislava 1958, Vydavateľstvo SAV.
- [2] J. BRILLA, Vyšetovanie stavu napätosti pri priečnom ohybe dosák, Forschungsbericht des Instituts für Bauwesen und Architektur SAV, Bratislava 1958.
- [3] V. T. BUCHWALD, A Mixed Boundary-value Problem in the Elementary Theory of Elastic Plates. Quart. J. Mech. Appl. Math. 10 (1957), H. 2.
- [4] G. M. L. GLADWELL, Some Mixed Boundary Value Problems in Isotropic Thin Plate Theory. Quart. J. Mech. Appl. Math. 11 (1958), H. 2.
- [5] G. M. L. GLADWELL, Some Mixed Boundary-value Problems of Anisotropic Thin Plate Theory. Quart. J. Mech. Appl. Math. 12 (1959), H. 1.
- [6] А. И. Каландия, Об одной смешанной задаче изгиба упругой пластинки. ПММ 16 (1952), № 3.
- [7] А. И. Каландия, Общая смешанная задача изгиба упругой пластинки. ПММ 16 (1952), № 5.
- [8] S. KALISKI, W. NOWACKI, Some Problems of Structural Analysis of Plates with Mixed Boundary Conditions. Arch. Mech. Stos. 8 (1956), H. 4.
- [9] С. Г. Лехницкий, Анизотропные пластинки, Москва 1957, Гостехиздат.
- [10] Г. Ф. Манджвидзе, Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости. ПММ 15 (1951), № 3.
- [11] Н. И. Мухомелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Москва 1946, Гостехиздат.
- [12] W. NOWACKI, Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych. Arch. Mech. Stos. 3 (1951), H. 3—4.
- [13] W. NOWACKI, Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych. Arch. Mech. Stos. 5 (1953), H. 2.
- [14] H. ZORSKI, Plates with Discontinuous Supports. Arch. Mech. Stos. 10 (1958), H. 3.
- [15] H. ZORSKI, Some Cases of Bending of anisotropic Plates. Arch. Mech. Stos. 11 (1959), H. 1.

Manuskripteingang: 24. 11. 1959

Anschrift: Ing. Dr. JOZEF BRILLA, Institut für Bauwesen und Architektur der Slowakischen Akademie der Wissenschaften, Bratislava, Obrancov mieru 41 (ČSSR)

ZAMM 40 (1960) Heft 10-11, Seite 482—488

## Thermal Stresses in Spherical Shells of Visco-elastic Materials

By B. D. AGGARWALA

*Für die thermischen Spannungen in einer Kugelschale von beliebigem linearem Material mit temperaturabhängigen Eigenschaften wird ein mathematischer Ausdruck abgeleitet. Die entsprechenden Resultate für einen Maxwell'schen Festkörper erhält man daraus als Spezialfall. Verschiedene numerische Resultate werden angegeben.*

*An expression has been obtained for thermal stresses in spherical shells of general linear material whose properties vary with temperature. The corresponding results for a Maxwell solid are obtained as a particular example. Various numerical results are given.*

Выводится выражение для термических напряжений в сферических оболочках, материал которых обладает линейными свойствами, изменяющимися в зависимости от температуры. Соответствующие результаты для максвелловского твёрдого тела получаются в качестве частного примера. Даются некоторые численные результаты.

## The problem

A spherical shell made of general linear solid material whose properties vary with distance from the center and with temperature, is cooled down (or heated) from any given temperature. We wish to find what the stress distribution in the spherical shell is at any subsequent moment. The inertia effects and the effects of stresses on temperature are neglected.

The corresponding problem for a sphere is discussed in [1]. For the sake of completeness we shall reproduce part of [1] here.

We start with the stress-strain relations

$$A e_{ij} + B \dot{e}_{ij} = C s_{ij} + D \dot{s}_{ij} \quad (1)$$

and

$$\dot{e} = K \sigma + \varepsilon, \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{kk} \delta_{ij}}{3}, \quad s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma_{kk} \delta_{ij}}{3} \quad (2)$$

where  $e_{ij}$  and  $s_{ij}$  are deviatoric strain and stress components respectively and  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  are functions of distance from the center and temperature. We assume that temperature  $T$  of the shell is known as a function of distance ( $r$ ) and time ( $t$ ), so that  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$  are known functions of  $r$  and  $t$ .  $K$  is assumed to be constant throughout; while  $\varepsilon = \int \alpha dT$ ,  $\alpha$  being the coefficient of linear expansion (also a function of  $r$  and  $T$  and therefore of  $r$  and  $t$ ).



We start with the assumptions  $\sigma_\theta = \sigma_\varphi$ ,  $\sigma_{r\theta} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{\theta\varphi} = 0$ . Also  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$ ,  $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\theta\varphi} = 0$  where  $\sigma_{ij}$  and  $\varepsilon_{ij}$  are stress and strain components.  $e = \varepsilon_{ii}/3$ ,  $\sigma = \sigma_{ii}/3$ .

The equations (1) become

$$A (\varepsilon_r - e) + B (\dot{\varepsilon}_r - \dot{e}) = C (\sigma_r - \sigma) + D (\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma})$$

$$A (\varepsilon_\theta - e) + B (\dot{\varepsilon}_\theta - \dot{e}) = C (\sigma_\theta - \sigma) + D (\dot{\sigma}_\theta - \dot{\sigma})$$

subtraction gives

$$A (\varepsilon_r - \varepsilon_\theta) + B (\dot{\varepsilon}_r - \dot{\varepsilon}_\theta) = C (\sigma_r - \sigma_\theta) + D (\dot{\sigma}_r - \dot{\sigma}_\theta) \dots \dots \dots (3)$$

(dot denotes differentiation with respect to time).

Also (2) gives

$$\frac{\varepsilon_r + 2 \varepsilon_\theta}{3} = K \frac{\sigma_r + 2 \sigma_\theta}{3} + \varepsilon \dots \dots \dots (4).$$

The equation of equilibrium is

$$\frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r) + \frac{2}{r} (\sigma_r - \sigma_\theta) = 0$$

or

$$\sigma_\theta = \sigma_r + \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r) \dots \dots \dots (5).$$

And compatibility gives

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta + r \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon_\theta) \dots \dots \dots (6).$$

Substituting from (5) and (6) in (3) and (4) one gets

$$A \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon_\theta) + B \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} (\varepsilon_\theta) = -\frac{C}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r) - \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} (\sigma_r) \dots \dots \dots (7)$$

and

$$3 \varepsilon_\theta + r \frac{\partial}{\partial r} (\varepsilon_\theta) = K \left( 3 \sigma_r + r \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r) \right) + 3 \varepsilon \dots \dots \dots (8).$$

(8) is equivalent to

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^3 \varepsilon_\theta) = K \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \sigma_r) + 3 r^2 \varepsilon$$

or

$$\varepsilon_\theta = K \sigma_r + \frac{1}{r^3} \int^r 3 r^2 \varepsilon dr + \frac{f(t)}{r^3} \dots \dots \dots (9),$$

where  $f(t)$  is a function of time to be determined.

Substitution from (9) in (7) gives

$$\begin{aligned} & A K \frac{\partial}{\partial r} (\sigma_r) + A \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \int^r 3 r^2 \varepsilon dr \right) + A \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f(t)}{r^3} \right) + B K \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} (\sigma_r) \\ & + B \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left( \frac{1}{r^3} \int^r 3 r^2 \varepsilon dr \right) + B \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left( \frac{f(t)}{r^3} \right) + \frac{C}{2} \frac{\partial}{\partial r} \sigma_r + \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} (\sigma_r) = 0 \dots \dots (10). \end{aligned}$$

(10) is equivalent to

$$\sigma_r = - \int_r^b dr \varepsilon - \int_0^t \frac{2 A K + C}{2 B K + D} dt \int_0^t \frac{\Phi(r, t)}{2 B K + D} e^{\int_0^t \frac{2 A K + C}{2 B K + D} d\tau} d\tau \dots \dots \dots (11),$$

where

$$\begin{aligned} \Phi(r, t) = & -2 B \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left( \frac{1}{r^3} \int^r 3 r^2 \varepsilon dr \right) - 2 B \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left( \frac{f(t)}{r^3} \right) \\ & - 2 A \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r^3} \int^r 3 r^2 \varepsilon dr \right) - 2 A \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f(t)}{r^3} \right) \end{aligned}$$

and where the condition has been satisfied that at  $t = 0$ ,  $\sigma_r = 0$  throughout the material and for  $t > 0$   $\sigma_r = 0$  at  $r = b$  where  $a$  and  $b$  are inner and outer radii of the shell respectively.

The function  $f(t)$  in (11) must be found from the condition that  $\sigma_r = 0$  at  $r = a$  for all  $t$ .

## Visco-elastic Material

Using the MAXWELL model, the stress-strain relations are

$$e_{ij} = \frac{1}{2\eta} S_{ij} + \frac{1+\nu}{E} S_{ij}, \quad e = \frac{1-2\nu}{E} \sigma + \varepsilon$$

where  $\eta$ ,  $\nu$ , and  $E$  are viscosity, POISSON'S ratio and YOUNG'S modulus of elasticity respectively. Putting

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = \frac{1}{2\eta}, \quad D = \frac{1+\nu}{E}, \quad K = \frac{1-2\nu}{E},$$

$$2AK + C = \frac{1}{2\eta}, \quad 2BK + D = \frac{1}{2\beta},$$

where  $\beta = E/6(1-\nu)$ , equation (1) becomes

$$\sigma_r = - \int_a^b dr \int_0^t 2\beta \Phi(r, t) e^{-\int_{\tau}^t \frac{\beta}{\eta} d\tau} d\tau \quad \dots \quad (12),$$

where now

$$\Phi(r, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left[ \frac{1}{r^3} \int_a^r 3r^2 \varepsilon dr + \frac{f(t)}{r^3} \right] \quad \dots \quad (13).$$

The condition  $\sigma_r = 0$  at  $r = a$  requires

$$\int_a^b dr \int_0^t \beta \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left[ \frac{1}{r^3} \int_a^r 3r^2 \varepsilon dr + \frac{f(t)}{r^3} \right] e^{-\int_{\tau}^t \frac{\beta}{\eta} d\tau} d\tau = 0 \quad \dots \quad (14)$$

for all values of  $t$ .

Changing the order of integration in (14) one gets

$$\int_0^t dt \int_a^b \beta \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left[ \frac{1}{r^3} \int_a^r 3r^2 \varepsilon dr + \frac{f(t)}{r^3} \right] e^{-\int_{\tau}^t \frac{\beta}{\eta} d\tau} d\tau = 0 \quad \dots \quad (15).$$

It is easy to see that (15) is a VOLTERRA equation of the first kind.

In the heat treatment of glass, it is usual to assume [2], [3], [4], [5], that there is a critical temperature peculiar to the material such that above this temperature  $\eta = 0$  and below this temperature  $\eta = \infty$ . So that the stress  $\sigma_r$  at any point is zero so long as the temperature at this point is above the critical temperature.

Let us consider cooling of the shell from a temperature above this critical one and in such a fashion that the highest temperature at any moment in the shell is at  $r = a$ . As the shell starts cooling, at any given moment, so long as the inner boundary is above the critical temperature, a portion of the shell  $\bar{r} < r < b$  will be solid ( $\eta = \infty$ ) while the rest  $a < r < \bar{r}$  will be fluid.  $\bar{r}$  is a function of time. Once  $r = a$  is solidified, the whole shell will be solidified.

Let us now consider a value of  $t$ , say  $t_1$ , for which the portion  $\bar{r}_1 < r < b$  is solid while the rest is fluid.

Noting that as long as  $\eta = 0$  in any part of the interval  $(\tau, t)$ , the expression

$$e^{-\int_{\tau}^t \frac{\beta}{\eta} d\tau} \quad \dots \quad (16)$$

is zero, otherwise its value is 1, one has

$$e^{-\int_{\tau}^t \frac{\beta}{\eta} d\tau} \begin{cases} = 0 & \text{for } \tau < \bar{r}(\tau) \\ = 1 & \text{for } t_1 > \tau > \bar{r}(\tau) \end{cases} \quad \dots \quad (17),$$



and therefore (15) may be written

$$\int_0^{t_1} dt \int_r^b \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left[ \frac{1}{r^3} \int_r^{\bar{r}} 3 r^2 \dot{\epsilon} dr \right] dr = - \int_0^{t_1} dt \int_r^b \frac{\partial^2}{\partial r \partial t} \left( \frac{f(t)}{r^3} \right) dr \quad \dots \quad (18),$$

and because this equation is true for any  $t_1$  for which  $r = a$  has not solidified, one writes

$$\dot{j}(t) = \dot{j}_1(t) = \frac{1}{-\frac{1}{b^3} + \frac{1}{r^3}} \int_r^b \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^3} \int_r^{\bar{r}} 3 r^2 \dot{\epsilon} dr \right] dr \quad \dots \quad (19),$$

For values of  $t$  for which  $r = a$  has solidified, one writes

$$\dot{j}(t) = \dot{j}_2(t) = \frac{1}{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}} \int_a^b \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^3} \int_r^{\bar{r}} 3 r^2 \dot{\epsilon} dr \right] \quad \dots \quad (20).$$

The expression for  $\sigma_r$  may now be written as

$$\sigma_r = 4 \beta \int_r^b dr \int_{\bar{t}(r)}^t \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^3} \int_r^{\bar{r}} 3 r^2 \dot{\epsilon} dr \right] d\tau - 4 \beta \int_r^b dr \int_{\bar{t}(r)}^{\bar{t}_2} \dot{j}_1(t) \frac{3}{r^4} dt - 4 \beta \int_r^b dr \int_{\bar{t}_2}^t \frac{3}{r^4} \dot{j}_2(t) dt \quad (12a),$$

and for  $t < \bar{t}_2$

$$\sigma_r = 4 \beta \int_r^b dr \int_{\bar{t}(r)}^t \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^3} \int_r^{\bar{r}} 3 r^2 \dot{\epsilon} dr + \frac{1}{r^3} \dot{j}_1(t) \right] dr \quad \dots \quad (12b),$$

where  $\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}$  are the moments at which the surfaces  $r = b, r = a, r = r$  are just solidified.

The expression for temperature  $T$  in a spherical shell is governed by the equation

$$\frac{\partial}{\partial t} (r T) = \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r T) \quad \dots \quad (21).$$

We assume the boundary conditions

$$T = f(r) \quad \text{at} \quad t = 0 \quad \dots \quad (22a),$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -h T \quad \text{at} \quad r = b \quad \dots \quad (22b),$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad \text{at} \quad r = a \quad \dots \quad (22c).$$

These conditions ensure that at any moment the highest temperature is at  $r = a$ .

A particular solution of (21) is

$$T = T_0 e^{-\mu m^2 t} \left( \frac{\cos m r}{r} + C \frac{\sin m r}{r} \right) \quad \dots \quad (23),$$

where  $T_0, C$  and  $m$  are constants.

Substituting from (23) in (22b) and (22c) one infers that  $m$  must be a root of the equation

$$\begin{vmatrix} \frac{\cos m a}{a} + m \sin m a & \frac{\sin m a}{a} - m \cos m a \\ \frac{\cos m b}{b} + m \sin m b - h \cos m b & \frac{\sin m b}{b} - m \cos m b + h \sin m b \end{vmatrix} = 0 \quad \dots \quad (24).$$

We shall assume (23) to be the expression for temperature in the shell at any given moment,  $m$  will be taken to be the smallest positive root of (24). Also  $T_0$  is such that at  $t = 0$  the temperature in the shell is everywhere greater than  $T_c$ , the critical temperature of the material.

Assuming that  $m \ll 1$ , (23) may be written as

$$T = T_0 e^{-\mu m^2 t} \frac{1}{r} \quad \dots \quad (25).$$

The moment  $\bar{t}_1$  at which  $r = b$  is solidified is given by

$$T_c = T_o e^{-\mu m^2 \bar{t}_1} \frac{1}{b},$$

and the moment  $\bar{t}_2$  at which  $r = a$  is solidified is given by

$$T_c = T_o e^{-\mu m^2 \bar{t}_2} \frac{1}{a}.$$

Also  $\bar{t}$  as a function of  $r$  is given by

$$T_c = T_o e^{-\mu m^2 \bar{t}} \frac{1}{r} \quad \text{or} \quad \bar{t} = -\frac{1}{\mu m^2} \ln \frac{r T_c}{T_o}.$$

Substitution in (12a) and (12b) gives the desired stresses at any given moment.

Integration gives for stresses at  $t = \infty$

$$\sigma_r = [\xi T_c(\sigma_r)_1 + \zeta T_c^2(\sigma_r)_2] 4\beta$$

where

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_1 = \frac{3}{2} b^2 \left[ \frac{b}{2} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right) \ln \frac{r^2 + b r + b^2}{a^2 + b a + b^2} \right. \\ \left. + \frac{b}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right) \left( \tan^{-1} \frac{2r + b}{b\sqrt{3}} - \tan^{-1} \frac{2a + b}{b\sqrt{3}} \right) \right. \\ \left. + a \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right) - \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{b^2} \right) - \frac{a^3}{a^2 + b a + b^2} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right) \right] \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_2 = 3b \left[ \frac{b^2}{2} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right) \ln \frac{r^2 + b r + b^2}{a^2 + b a + b^2} \right. \\ \left. - \frac{b^2}{\sqrt{3}} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right) \left( \tan^{-1} \frac{2r + b}{b\sqrt{3}} - \tan^{-1} \frac{2a + b}{b\sqrt{3}} \right) \right. \\ \left. + \frac{a^2}{2} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right) - \frac{a^3(b + a)}{2(a^2 + b a + b^2)} \left( \frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3} \right) \right] \end{aligned}$$

and where  $\alpha = \xi + \zeta T$

$\xi$  and  $\zeta$  being constants.

$\sigma_\theta$  may now be obtained from (5).

We shall write

$$\sigma_\theta = [\xi T_c(\sigma_\theta)_1 + \zeta T_c^2(\sigma_\theta)_2] 4\beta.$$

The values of  $(\sigma_r)_1$ ,  $(\sigma_r)_2$ ,  $(\sigma_\theta)_1$ ,  $(\sigma_\theta)_2$ , taking  $b = 1$ , are given in tables for different values of  $a$ . It will be noticed that  $(\sigma_\theta)_2$  is of the same order of magnitude as  $(\sigma_\theta)_1$ . If, therefore,  $\zeta$  is of the order of  $\frac{\xi}{T_c}$  (which it often is) the contributions from the two terms are equally important.

Table I

$a = .2$

$r$	$(\sigma_r)_1$	$(\sigma_r)_2$	$(\sigma_\theta)_1$	$(\sigma_\theta)_2$
.2	0	0	-2.565	-3.673
.21	.099	.063	-2.141	-3.127
.22	.167	.110	-1.798	-2.670
.23	.229	.151	-1.509	-2.281
.24	.294	.188	-1.256	-1.962
.25	.319	.213	-1.070	-1.697
.35	.473	.325	-.169	-.435
.45	.447	.323	-.001	-.118
.55	.378	.285	-.012	-.055
.65	.296	.232	-.086	-.083
.75	.210	.171	-.181	-.152
.85	.125	.105	-.283	-.241
.95	.041	.035	-.385	-.339
.99	.008	.007	-.425	-.380



Table II  
 $a = .3$ 

$r$	$(\sigma_r)_1$	$(\sigma_r)_2$	$(\sigma_\theta)_1$	$(\sigma_\theta)_2$
.3	0	0	-2.368	-3.603
.31	.054	.039	-2.113	-3.240
.32	.099	.070	-1.890	-2.916
.33	.138	.098	-1.696	-2.635
.34	.173	.123	-1.523	-2.388
.35	.2	.143	-1.375	-2.167
.45	.325	.241	-.560	-.929
.55	.317	.244	-.314	-.495
.65	.263	.210	-.264	-.347
.75	.193	.159	-.292	-.321
.85	.117	.099	-.355	-.354
.95	.039	.034	-.434	-.418
.99	.008	.007	-.466	-.448

Table III  
 $a = .4$ 

$r$	$(\sigma_r)_1$	$(\sigma_r)_2$	$(\sigma_\theta)_1$	$(\sigma_\theta)_2$
.4	0	0	-2.192	-3.158
.41	.033	.025	-2.022	-3.253
.42	.061	.046	-1.870	-3.015
.43	.086	.065	-1.733	-2.798
.44	.108	.082	-1.608	-2.602
.45	.127	.097	-1.497	-2.424
.55	.217	.171	-.818	-1.307
.65	.211	.172	-.562	-.833
.75	.166	.140	-.479	-.632
.85	.106	.090	-.477	-.563
.95	.036	.032	-.515	-.564
.99	.007	.006	-.537	-.577

Table IV  
 $a = .5$ 

$r$	$(\sigma_r)_1$	$(\sigma_r)_2$	$(\sigma_\theta)_1$	$(\sigma_\theta)_2$
.5	0	0	-2.035	-3.428
.51	.020	.016	-1.916	-3.227
.53	.054	.044	-1.708	-2.870
.55	.081	.065	-1.532	-2.567
.65	.139	.116	-.983	-1.588
.75	.129	.111	-.744	-1.116
.85	.087	.077	-.651	-.889
.95	.031	.028	-.632	-.791
.99	.006	.006	-.637	-.774

Table V  
 $a = .6$ 

$r$	$(\sigma_r)_1$	$(\sigma_r)_2$	$(\sigma_\theta)_1$	$(\sigma_\theta)_2$
.6	0	0	-1.898	-3.337
.61	.012	.011	-1.811	-3.178
.63	.034	.029	-1.657	-2.892
.65	.050	.043	-1.523	-2.644
.75	.082	.073	-1.084	-1.794
.85	.066	.060	-.874	-1.346
.95	.025	.023	-.782	-1.111
.99	.005	.005	-.765	-1.053

Table VI  
 $a = .7$ 

$r$	$(\sigma_r)_1$	$(\sigma_r)_2$	$(\sigma_\theta)_1$	$(\sigma_\theta)_2$
.7	0	0	-1.777	-3.246
.71	.007	.007	-1.713	-3.119
.73	.020	.018	-1.596	-2.885
.75	.029	.026	-1.494	-2.679
.85	.042	.038	-1.143	-1.943
.95	.019	.018	-.964	-1.529
.99	.004	.004	-.922	-1.420

Table VII  
 $a = .8$ 

$r$	$(\sigma_r)_1$	$(\sigma_r)_2$	$(\sigma_\theta)_1$	$(\sigma_\theta)_2$
.8	0	0	-1.672	-3.160
.81	.004	.004	-1.623	-3.055
.83	.010	.010	-1.534	-2.863
.85	.014	.013	-1.455	-2.689
.90	.017	.016	-1.294	-2.328
.95	.012	.011	-1.175	-2.052
.99	.003	.003	-1.102	-1.875

Table VIII  
 $a = .9$ 

$r$	$(\sigma_r)_1$	$(\sigma_r)_2$	$(\sigma_\theta)_1$	$(\sigma_\theta)_2$
.9	0	0	-1.580	-3.077
.91	.0016	.0015	-1.543	-2.990
.93	.0035	.0035	-1.473	-2.828
.95	.0040	.0039	-1.411	-2.682
.97	.0033	.0032	-1.356	-2.549
.99	.0014	.0013	-1.307	-2.427

## Acknowledgment

I am thankful to Dr. EDWARD SAIBEL for suggesting me this field of investigation.

## References

- [1] AGGARWALA, B. D. and EDWARD SAIBEL. Forthcoming publication.
- [2] RONGVED, L., Viscoelastic stress in glass spheres, Ph. D. thesis, Columbia University, 38 pp, 1956 (processed)
- [3] BARTENEV, G. N., Stekolnaya i keram. prom. 5 (1949), pp 7—12.
- [4] GERARD, P., and TROUSSANT, L., Revue Universelle des Mines, 9e Series, T. VII, No. 11, pp. 396—409.
- [5] R. C. O'ROURKE and A. W. SAENZ, Quart. Appl. Math., 8 (1950), pp. 303—311.

Manuskripteingang: 25. 11. 1959

Anschrift: B. D. AGGARWALA, Rensselaer Polytechnic Institute, Dept. of Mechanics, Troy (New York), USA

ZAMM 40 (1960) Heft 10/11, Seite 488—493

## Successive Approximations Process in Analog Solution of Partial Differential Equations by Difference Method

By JOSEF MATYÁŠ

*Diese Arbeit beschreibt eine Methode der schrittweisen Näherung bei der Lösung von partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe von Analogrechengern. Für eine breite Klasse von Randwertaufgaben (oder Anfangs-Randwertaufgaben) wird ein Konvergenzsatz bewiesen. Ein Prozeß, welcher die Geschwindigkeit der Konvergenz erhöht und die Genauigkeit der Lösung abzuschätzen erlaubt, wird vorgeschlagen und die Lösung auf einem Analogrechner diskutiert. Die angegebene Methode ermöglicht es, umfangreiche Randwertaufgaben (oder Anfangsrandwertaufgaben) für partielle Differentialgleichungen mit hoher Genauigkeit auch mit Hilfe eines kleinen oder mittelgroßen Analogrechners zu lösen.*

*In this paper a method of successive approximations in analog solution of partial differential equations is described. The convergence theorem for a wide class of boundary (or initial-boundary) value problems is proved. A solution procedure is proposed to reach higher speed of the convergence of the successive approximations process and for estimating the accuracy of the solution. Analog computer solution is briefly discussed.*

*This successive approximations method enables us to solve large boundary (or initial-boundary) value problems for partial differential equations with a high degree of accuracy on analog computers of little or medium size too.*

В настоящей работе описывается метод последовательных приближений для решения дифференциальных уравнений с частными производными при помощи моделирующих вычислительных машин. Доказывается предельная теорема для широкого класса краевых (или смешанных) задач. Описан способ решения, который ускоряет предельный процесс последовательных приближений. С его помощью также можно оценить точность полученного решения. Коротко описано решение при помощи моделирующих устройств. С применением метода последовательных приближений можно также большие краевые (или смешанные) задачи для уравнений с частными производными решить с высокой степенью точности при помощи моделирующих устройств малого или среднего ранга.



## 1. Introduction

Many practical important problems require the solution of boundary value problems or initial-boundary value problems for partial differential equations. It is well known that partial differential equations can be solved (for example with the help of an analog computer) by finite difference methods (see [1] and [9]).

The technical praxis often requires a very precise solution of the problem. The accuracy of the solution depends, however, on the distance between neighbour mesh-points. With diminishing of the distance between neighbour mesh-points the total number of mesh-points increases rapidly. It follows that large boundary value problems can be solved in this way with a high degree of accuracy on really large analog computers only (on computers with at least hundreds computing units and very precise values of computing elements).

Present paper contains description of a successive approximations method. This method enables us to solve large boundary value problems (or initial boundary value problems) with a high degree of accuracy also on analog computers of little or medium size.

## 2. Definition of successive approximations method

We shall consider a given correct boundary (or initial-boundary) value problem with unique finite solution to be solved with a high degree of accuracy. The mesh-sizes must be, of course, very small and the number of mesh points will be therefore very large.

With the use of finite difference method a set of equations (algebraic or ordinary differential equations) from the given boundary value problem can be derived (one equation for every inner mesh-point of the region of solution). It is well known ([2], [3]) that the solution of this set of equations differs less than any prescribed value from the exact solution of the given problem in every mesh-point if distances between neighbour mesh-points are small enough.

Let us divide the region  $Q$  of solution of the given boundary (or initial-boundary) value problem into a finite number of overlapping subregions  $Q_1, Q_2, \dots$ . An example for two-dimensional square regions is shown on the fig. 1. Thus we get for every subregion  $Q_k$  a new boundary value problem. If the solution of our given (original) problem on all boundary mesh points of a subregion  $Q_k$  were known, then the solution of the problem for the subregion  $Q_k$  would be identical with the original problem in all mesh-points of the subregion  $Q_k$ . Unfortunately, the solution of the original problem for inner points of the region  $Q$  is not known initially.

Let us consider following solution process, which we call process of successive approximations:

a) The zero-approximation of the solution of our original problem we take quite arbitrarily (e. g. identical zero or identical with the initial conditions).

b) As the first approximation in every subregion  $Q_k$  let us take the solution of the boundary value problem for  $Q_k$  with boundary values given by the zero-approximation on its boundary, which is not common with the boundary of  $Q$  (on its rest of boundary) and with the given boundary values for part of boundary common with  $Q$ .

c) As the following second (in general  $n$ -th) approximation in every subregion  $Q_k$  let us take the solution of the boundary value problem for  $Q_k$  with boundary values given by the first (in general by foregoing) approximation on its rest of boundary and with the given boundary values for the common part of its boundary.

d) Repeat the procedure c) so long until we obtain last two approximations almost identical.

If for every inner mesh-point of the region  $Q$  this successive approximations process converges to the approximative solution of the original problem (to the solution of the supplementary set of equations), then for  $n$  large enough the  $n$ -th approximation differs from the exact solution of the problem less than any prescribed value in every mesh point from  $Q$ .

## 3. Convergence theorem

It seems to be quite reasonable to expect that the process of successive approximations defined above converges to the solution of the supplementary set of equations (to the approximate solution of the original problem) in every mesh-point at least for all boundary or initial-boundary value problems which have a physical interpretation.

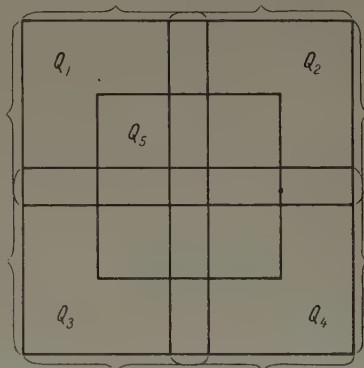


Fig. 1. An example of division of the two-dimensional square region  $Q$  into five overlapping subregions  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5$ .

Let us suppose that the supplementary set of equations derived with the use of finite difference method from the given initial-boundary value problem (original problem) is a set of differential equations. Then, the initial-boundary value problem for every subregion  $Q_k$  can be replaced with a subset of this set of equations. The successive approximations process defined in the section 2 can be assumed as a process for solution of the original supplementary set of equations.

Let us consider that the original supplementary set of ordinary differential equations (original set) has following form:

$$u_k^{(k)}(t) = f_k(t, u_1, u_1', \dots, u_2, u_2', \dots, \dots), \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots (1),$$

where  $k$  runs through all mesh points.

For this set of equations we formulate two lemmas at the first time.

Lemma 1. Let us consider the set of equations (1), functions  $f_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) of which fulfill following conditions:

1. functions  $f_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) are continuous functions of all their arguments in the whole domain of solution,
2. in the whole domain of solution the functions  $f_k$  fulfill the LIPSCHITZ condition with regard to all their arguments.

Let be such initial conditions prescribed, that the set of equations (1) has a unique solution  $u_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Then the successive approximations process defined above converges to a set of functions  $v_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Proof: From the given set (1) a set of differential equations of the first order, which is equivalent with it (normal set of equations of the first order [4]) in usual way can be derived. For this new set of equations PICARD's approximations procedure is defined [4]. It is well known that the PICARD's approximations procedure converges to a set of functions [4]. In a similar way convergence of our successive approximations process can be proved. These limite functions let us denote  $v_k(t)$ .

The detail proof of this lemma is quite analogous to the proof of the convergence of the procedure of PICARD's approximations. It is, however, complicated and therefore we omit it in this paper.

Our successive approximations process differs from PICARD's approximations in following way: in every step of the solution procedure a subset of the original set of equations is solved whilst in PICARD's approximations procedure a unique equation of the first order in every step is solved. From the comparison of these two solution procedures we can expect:

- a) our successive approximations process converges too,
- b) the speed of the convergence of it will be greater than of PICARD's approximations procedure.

Lemma 2. The set of functions  $v_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) from lemma 1 forms exact solution of the original set (1) i. e. it holds

$$v_k(t) = u_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots \dots (2).$$

Proof: The set of functions  $v_k(t)$  are the limit functions of the successive approximations process. From the definition of it follows:

1. in every step of the solution procedure a subset of the given set (1) is solved,
2. any equation of the set (1) belongs at least to one of its subsets.

It follows from the lemma 1 that the limit function  $v_1(t)$  fulfills not only the first but all equations of the set (1). In general function  $v_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) fulfills all equations of the set (1). From the uniqueness of the solution of set (1) it follows that equation (2) holds.

Convergence theorem. For every initial-boundary value problem which has a unique solution and the supplementary set of differential equations of which has the form (1) the successive approximations process defined above converges to the solution of the supplementary set of equations (to the approximate solution of the given initial-boundary value problem) under conditions 1 and 2 from the lemma 1.

Proof: It is quite easy to see that for the supplementary set of the given problem in this theorem lemma 1 and 2 hold. Thus our theorem is proved.

With diminishing of mesh sizes the solution of the supplementary set of equations converges to the exact solution of the original problem [2]. From our convergence theorem it follows that the limit functions of the successive approximations process differs less than any prescribed value from the exact solution of the original problem if the mesh-sizes are small enough.



If the supplementary set of equations for original boundary value problem is a set of algebraic equations, we can consider that the solution of it is a steady state solution of an adequate set of differential equations of the first order (see [6]). For this case holds the convergence theorem. Hence it follows that the successive approximations method for algebraic set of equations converges too. With supplementary set of algebraic equations the boundary value problem for elliptic equation can be replaced.

#### 4. Two examples

##### 1. Elliptic equation:

For simplicity let us consider the LAPLACE equation in two variables. For this case the numerical solution procedure (see [5] — method of nets) is a special case of our successive approximations process. The convergence of the method of nets for two-dimensional case is proved in [5]. This convergence follows also from our convergence theorem.

##### 2. Parabolic equation:

Let us consider a nonlinear parabolic equation of the form:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ u \frac{\partial u}{\partial x} \right] = a(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} \quad . . . . . (3)$$

to be solved in space interval

$$0 \leq x \leq X \quad . . . . . (4),$$

and in time region

$$t \geq 0 \quad . . . . . (5)$$

with prescribed initial condition

$$u(0, x) = g(x) \quad . . . . . (6)$$

and boundary conditions

$$u(t, 0) = u_0(t), \quad u(t, X) = u_n(t) \quad . . . . . (7).$$

(This equation we meet for example in hydraulic problems [7].) It can be shown that this initial-boundary value problem defined with equations (3)—(7) can be replaced with following supplementary set:

$$\frac{1}{2} [u_{k-1}^2 - 2u_k^2 + u_{k+1}^2] = a_k(t) \frac{du_k}{dt}, \quad (k = 1, 2, \dots, n-1) \quad . . . . . (8)$$

where

$$a_k(t) = a(t, x_k) \quad . . . . . (9).$$

(see [7]). In this case multipliers or squaring devices must be used to solve the set of equations (8) on analog computer. It seems to be very suitable to use described successive approximations method of solution in this case in order to reduce the great number of nonlinear (and also linear) computing units which are necessary to the solution.

The division of the original space interval  $\langle 0, X \rangle$  into overlapping subintervals depends on chosen mesh-size (desired accuracy of the solution) and on the number of computing units in analog computer.

In a quite similar way successive approximations process to solution of boundary value problems for other partial differential equations in one, two or more space coordinates can be proposed.

#### 5. Speed of convergence and accuracy of the solution

The successive approximations solution procedure, however, is time consuming. The solution time can be diminished with the increasing speed of the convergence of it. This speed depends substantially on the zero-approximation. To spare the time it is necessary to find a suitable zero-approximation which is the first difficulty.

The second difficulty lies in the required accuracy of the solution. In most practical cases the relative (or absolute) maximal error of the solution is prescribed. The mesh-size belonging to this required accuracy, however, is not known and cannot be determined in a simple way.

Both mentioned difficulties can be overcome with the use of following solution procedure:

1. Let us choose such a large mesh-size that the given problem can be solved on the analog computer at once (without dividing the region  $Q$ ). This situation is shown on the fig. 2a for one-dimensional case (on the analog computer equations for three inner mesh-points can be solved simultaneously).

2. Let us take a smaller mesh-size and define suitable subregions  $Q_k$ . It is advantageous when most boundary mesh-points of all  $Q_k$  are mesh-points from the foregoing step. On the fig. 2b the mesh-size is the half of the foregoing one and three overlapping subintervals  $Q_k$  are defined. For these subregions  $Q_k$  with chosen mesh-size we make use of the successive approximations solution procedure. As the boundary values in solving problem for  $Q_k$  let us take last approximations at its boundary mesh-points always.

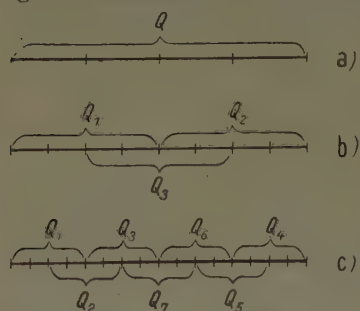


Fig. 2. An example of diminishing of the mesh-sizes during the solution procedure in the one-dimensional case.

3. Let us repeat the procedure 2 (see fig. 2c) so long until we get the required accuracy of the solution in all mesh-points.

The accuracy of the solution can be easily estimated from the difference of solutions for two last (smallest) mesh-sizes in common mesh-points. Hence we see that the process of diminishing of the mesh-size is very helpful for estimating of the accuracy of the solution of given problem.

## 6. Analog computer solution

The boundary value problem for subregions  $Q_k$  in every step of the described procedure can be solved using an analog computer in a usual way (see [1], [7], [9]).

In the described solution procedure the solution in some mesh-points in each particular problem (for each  $Q_k$ ) are boundary values for further particular problems. These solutions must be written down and reproduced when they are needed. For this purpose various devices as for example magnetic memory (on tape or drum), writing and reading devices, various types of function generators and further can be used.

When the desired accuracy of the solution is achieved, the solution in all mesh-points must be written down, and thus the procedure of solution is finished.

In the paper [8] an analogous but much simpler procedure for solving a set of ordinary differential equations of a special form on an analog computer is scheduled. The convergence of it, however, was not proved. This procedure is also a special case of our successive approximations process.

With the lemmas 1 and 2 (section 3) the convergence of the described solution procedure for a wide class of sets of ordinary differential equations is proved. For analog computer solution, however, this method can be used only in special cases. In a general case for every step of the procedure the computer set-up (programm connection) must be changed. This would be very time consuming and therefore this method of solution cannot be used in praxis in those general cases.

In most cases of solving boundary value problems for partial differential equations by difference method, however, the computer set-up for all steps of the solution procedure (or almost for all steps) remains without change.

It follows that this solution procedure is very advantageous for analog solution of boundary (or initial-boundary) value problems. It is obvious that it can be used in connection with differential analysers, resistance or other network analogs and any other analog computing devices.

## 7. Conclusions

In this paper a method of successive approximations for analog solution of sets of ordinary differential equations is described and its convergence for a wide class of such sets is proved. For analog solution, however, this method can be used in special cases only. Boundary value problems and initial boundary value problems for partial differential equations in finite difference form are such suitable sets of equations.

The convergence theorem for a wide class of boundary or initial boundary value problems is proved. The advantage of described solution procedure for these problems follows from the fact that the computer set-up for analog solution (using a differential analyser or other analog computing devices) remains without change for all steps of the solution procedure.

In the example No 1 it is shown that the numerical solution procedure of the LAPLACE equation is a special case of described successive approximations process.

A procedure of diminishing of mesh-sizes is proposed. This procedure is very advantageous for increasing of the speed of the convergence and for estimating the accuracy of the solution.

The described solution procedure enables us to solve also large boundary value problems with high degree of accuracy using analog computers of little or mean size (the solution time, of course, increases). Without it a great number of computing units (linear and nonlinear) would be needed for higher degree of desired accuracy. With the use of this method the necessary number of computing units can be substantially reduced.



## References

- [1] R. M. HOWE and V. S. HANEMAN jr., The Solution of Partial Differential Equations by Difference Methods using the Electronic Differential Analyser, Proc. of the IRE 41 (1953), pp. 1497—1508.
- [2] Рябенкий, Филипов, Об устойчивости разностных уравнений (About the Stability of Difference-Differential Equations). Гос. изд. тех.-теор. лит., Москва 1956.
- [3] JUNCOSA YOUNG, On the Order of Convergence of a Difference Equation to a Solution of Diffusion Equation, Il. of the Soc. for Industr. and Appl. Math. 1 (1953), pp. 111—135.
- [4] В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений (Differential Equations). Гостехиздат, Москва 1953.
- [5] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными (Partial Differential Equations).
- [6] И. И. Этерман, Математические машины непрерывного действия (Analog Computing Devices). Госуд. научно-техн. изд. машиностр. лит., Москва 1957.
- [7] V. HÁLEK, J. MATYÁŠ, Řešení hydraulických problémů pomocí analogových počítačů. (Solution of hydraulic problems using analog computers) (is printed).
- [8] Т. М. Островский, Метод приближенного решения уравнений порядок которых превышает возможности моделирующих установок (A Method of Approximate Solution of Diff. Equations of High Order which cannot be Solved on Analog Computers in Usual Way). Автоматика и телемеханика, август 1959, стр. 1129
- [9] J. MATYÁŠ, Modellieren einer Leitung mit verschiedenen Randbedingungen mit Hilfe eines Analogrechners. Archiv der elektrischen Übertragung 13 (1959), S. 482—486.

Manuskripteingang: 15. 12. 59

Anschrift: JOSEF MATYÁŠ, Pardubice, Dukla 2223, ČSSR

ZAMM 40 (1960) Heft 10/11, Seite 493—507

## Some Problems in the Small Deflexions of Clamped Thin Isotropic Plates

By W. A. BASSALI

*Methoden der konformen Abbildung werden benutzt, um exakte Lösungen mit endlichen Ausdrücken für die kleinen Verbiegungen gewisser eingespannter krummlinig begrenzter dünner Platten zu erhalten, die unter der Einwirkung einer über einer Kreisfläche symmetrisch verteilten Last oder aber von isolierten Kräften und Kräftepaaren stehen, die an beliebigen oder angegebenen Punkten angreifen. Begrenzungen bestehend aus den Inversen von Ellipsen bezüglich innerer Punkte oder Randpunkte sind zugelassen. Reguläre krummlinig-polygonale Platten, die von  $n$  gleichen nahezu kreisförmigen Bögen begrenzt werden, werden gleichfalls behandelt.*

*Conformal mapping methods are applied to find exact solutions in finite terms for the small deflexions of certain thin clamped curvilinear plates subject to symmetrical loading distributed over the area of a circle or acted by isolated forces or couples at arbitrary or specified points. Plates bounded by the inverses of an ellipse with respect to internal or boundary points are included. Regular curvilinear polygonal plates bounded by  $n$  equal and very approximately circular arcs are also considered.*

Методы конформного отображения применяются для нахождения точных решений в конечном виде для мелких изгибов некоторых, скреплённых в отдельных местах, криволинейных пластинок под влиянием симметрической нагрузки, распределённой по кругу, или вызываемой отдельными силами, соответственно парами сил, в произвольных или избранных точках. Включаются в рассмотрение также и пластинки, ограниченные обращёнными относительно внутренних или краевых точек эллипсами. Рассматриваются также криволинейные многоугольные пластинки, ограниченные  $n$  одинаковыми между собой дугами, мало отличающимися по своей форме от дуг окружностей.

### 1. Introduction

The problem of the bending of a clamped thin plate of homogeneous isotropic material under a loading normal to its surface has attracted the attention of many researchers. SCHMIDT [11] solved the problem of a circular plate uniformly loaded over an eccentric circle. The deflexion of an elliptic plate loaded by an isolated load at any point was found by SENGUPTA [13]. Curvilinear coordinates were used by SEN [12] to obtain exact solutions for uniformly loaded plates bounded by the cardioid, BOOTH's lemniscate, PASCAL's limaçon and the loop of a lemniscate of BERNOULLI. The same coordinates were used by DAS [7] to obtain the deflexions in a centrally loaded plate with the shape of BOOTH's lemniscate and in a PASCAL's limaçon loaded by an isolated force at its focus. WOJNOWSKY-KRIEGER [16] gave a solution in the form of an infinite integral for the deflexion of a wedge-shaped plate clamped along the radial edges and carrying a single load on the bisector radius of the plate.

Complex variable methods have been extensively applied to derive solutions for flexural problems of thin plates. TIFFEN [15] dealt with clamped slabs subject to isolated interior loading; the slabs occupying half-planes, regions which can be conformally mapped on a half-plane and infinite strips. MUSKHELISHVILI's method was used by GRAY [10], DEVERALL [9] and YU [18] in the analysis of problems concerning thin plates under isolated or continuous lateral loadings. STEVENSON [14] found the complex potentials for a clamped and uniformly loaded regular curvilinear plate which is conformally mapped on the unit circle by

$$z = c \zeta (1 + m \zeta^n), \quad c > 0, \quad 0 \leq m(n+1) \leq 1.$$

When the same plate is partially and symmetrically loaded over a concentric circle the appropriate complex potentials were derived by the author [4]. In two recent papers the author [5], [6] has also studied the transverse flexure of clamped regular curvilinear plates which are mapped on the unit circle by

$$z = c \zeta / (1 + m \zeta^n), \quad c > 0, \quad 0 \leq m(n-1) \leq 1,$$

the plates being either uniformly loaded or subject to isolated loads or couples applied at arbitrary or specified points. In this paper closed expressions are derived for the complex potentials and deflexions of clamped curvilinear plates mapped on the unit circle  $\gamma$  by

$$z = c \zeta / (1 + \lambda_1 \zeta^n + \lambda_2 \zeta^{2n}), \quad c > 0,$$

where  $n$  is an integer and  $\lambda_1, \lambda_2$  are real coefficients restricted so that the roots of  $z'(\zeta) = 0$  do not lie inside  $\gamma$ ; the plates being either symmetrically loaded over a circular area or loaded by isolated forces or couples. For  $n > 2$  and certain values of  $\lambda_1, \lambda_2$  the plates considered are bounded by  $n$  equal and approximately circular arcs. By taking  $\lambda_1$  to be a complex constant in the case  $n = 1$  clamped plates bounded by the inverses of an ellipse with respect to any internal or boundary point are discussed. The following special cases are included: (a) a clamped circular plate symmetrically loaded over an eccentric circle, (b) an infinite plate clamped in one half of a straight line, (c) a clamped half-plane with a curvilinear notch or a curvilinear boss. Problems of isolated interior loading are considered for all the above types of regions.

## 2. General Formulation of the Flexural Problem

Let  $\Gamma$  denote the boundary of a thin isotropic plate of thickness  $2h$  and flexural rigidity  $D$ . We assume that  $C$  is a closed smooth curve lying totally inside  $\Gamma$  and dividing it into the two regions 1 inside  $C$  and 2 between  $\Gamma$  and  $C$ . If  $p_1$  and  $p_2$  are the transverse load intensities at points of regions 1 and 2, respectively, the small deflexions  $w_1$  and  $w_2$ , measured positively upwards, at any point  $z = x + iy = r e^{i\theta}$  of the mid-plane of the plate are given by

$$w_j = \bar{z} \Omega_j(z) + z \bar{\Omega}_j(\bar{z}) + \omega_j(z) + \bar{\omega}_j(\bar{z}) + W_j(z, \bar{z}) \quad (j = 1, 2) \quad (1),$$

where  $\Omega_j(z)$ ,  $\omega_j(z)$  ( $j = 1, 2$ ) are the complex potentials which are regular in their domains and  $W_j(z, \bar{z})$  ( $j = 1, 2$ ) are two particular integrals of the partial differential equations

$$\nabla^4 w_j = 16 \partial^4 w_j / \partial z^2 \partial \bar{z}^2 = -p_j(z, \bar{z}) / D \quad (j = 1, 2) \quad (2);$$

bars being used to denote conjugate complex quantities. When  $p_1$  and  $p_2$  are given the corresponding particular integrals can be easily found and the solution of the flexural plate problem lies in the determination of the four complex potentials which satisfy the transition conditions along  $C$  and the required boundary conditions along  $\Gamma$ . Once these four functions are obtained the deflexions, moments and shears at any point of the plate may be computed by means of standard formulae.

## 3. Boundary Conditions

We assume that the transformation

$$z = z(\zeta), \quad \zeta = \xi + i\eta = \varrho e^{i\varphi}, \quad z'(\zeta) \neq 0, \quad \infty \text{ for } \varrho < 1 \quad (3)$$

maps the region inside  $\Gamma$  in the  $z$ -plane conformally on the area inside the unit circle  $\gamma$  in the  $\zeta$ -plane. The conditions for the plate to be clamped along  $\Gamma$  are

$$w = 0, \quad \partial w / \partial n = 0 \quad \text{on } \Gamma \quad (4),$$

where  $\partial/\partial n$  denotes differentiation along the outward drawn normal. In terms of the complex potentials and particular integral of region 2 these conditions take the forms

$$\left. \begin{aligned} \bar{z} \Omega_2(z) + z \bar{\Omega}_2(\bar{z}) + \omega_2(z) + \bar{\omega}_2(\bar{z}) + W_2(z, \bar{z}) &= 0, \\ \bar{z} \Omega_2'(z) + \bar{\Omega}_2'(\bar{z}) + \omega_2'(z) + \partial W_2 / \partial z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{on } \Gamma \quad (5);$$



accents indicate differentiation with respect to the argument stated. Writing

$$\Omega_j(z) = \Phi_j(\zeta), \quad \omega_j(z) = \chi_j(\zeta) \quad (j = 1, 2) \quad (6),$$

and assuming that region 2 is unloaded ( $p_2 = 0$ ) so that  $W_2(z, \bar{z})$  may be taken as zero, we see that the boundary conditions (5) may be written as

$$\bar{z}(\sigma^{-1}) \Phi_2(\sigma) + z(\sigma) \bar{\Phi}_2(\sigma^{-1}) + \chi_2(\sigma) + \bar{\chi}_2(\sigma^{-1}) = 0 \quad (7a),$$

$$\bar{z}(\sigma^{-1}) \Phi_2'(\sigma) + z'(\sigma) \bar{\Phi}_2(\sigma^{-1}) + \chi_2'(\sigma) = 0 \quad (7b),$$

where  $\sigma = e^{i\psi}$  is any point on  $\gamma$ .

#### 4. Mapping Function

Let  $\Gamma_n$  denote the boundary of the plate mapped on the unit circle by

$$z = c \zeta / (1 + \lambda_1 \zeta^n + \lambda_2 \zeta^{2n}), \quad c > 0 \quad (8),$$

where  $n$  is a positive integer and  $\lambda_1, \lambda_2$  are two real parameters chosen such that  $z'(\zeta)$  does not vanish or become infinite within  $\Gamma_n$ . If  $\Gamma_n'$  is the inverse of  $\Gamma_n$  with respect to the circle  $|z| = d$  and  $z = x + iy, z' = x' + iy'$  are the points on  $\Gamma_n, \Gamma_n'$  respectively, which correspond to  $\sigma = e^{i\psi}$  on  $\gamma$  then  $z' \bar{z} = d^2$  and substituting in (8) yields

$$z' = c' e^{i\psi} (1 + \lambda_1 e^{-n i \psi} + \lambda_2 e^{-2n i \psi}) \quad (9),$$

where  $c'c = d^2$ . The parametric equations of  $\Gamma_n'$  are therefore

$$x'/c' = \cos \psi + \lambda_1 \cos n_1 \psi + \lambda_2 \cos n_2 \psi, \quad y'/c' = \sin \psi - \lambda_1 \sin n_1 \psi - \lambda_2 \sin n_2 \psi \quad (10),$$

where

$$n_1 = n - 1, \quad n_2 = 2n - 1 \quad (11),$$

and those of  $\Gamma_n$  are

$$\left. \begin{aligned} c x/r^2 &= \cos \psi + \lambda_1 \cos n_1 \psi + \lambda_2 \cos n_2 \psi, & c y/r^2 &= \sin \psi - \lambda_1 \sin n_1 \psi - \lambda_2 \sin n_2 \psi, \\ \text{where} & & c^2/r^2 &= 1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1(1 + \lambda_2) \cos n\psi + 2\lambda_2 \cos 2n\psi \end{aligned} \right\} \quad (12).$$

By varying  $n, \lambda_1$  and  $\lambda_2$  various shapes having several axes of symmetry may be obtained. In general, each of  $\Gamma_n$  or  $\Gamma_n'$  is a certain curvilinear polygon of  $n$  sides and  $n$  rounded vertices. For the contour  $\Gamma_n$  these vertices occur when  $r$  is a minimum and become cusps when the critical points of (8), given by  $z'(\zeta) = 0$ , fall upon  $\Gamma_n$ . We now study separately the following cases: (a) The case  $n = 1$ . In this case the transformation (8) becomes

$$z = c \zeta / (1 + \lambda_1 \zeta + \lambda_2 \zeta^2), \quad c > 0, \quad |\lambda_2| \leq 1 \quad (13),$$

and the contour  $\Gamma_1'$  defined by (9) simplifies to

$$z' - z'_0 = c' (e^{i\psi} + \lambda_2 e^{-i\psi}) \quad (14a),$$

where

$$z'_0 = x'_0 + iy'_0 = c' \lambda_1 \quad (14b).$$

Taking  $\lambda_1$  in (14) to be a complex constant we see that  $\Gamma_1'$  is the ellipse

$$(x' - x'_0)^2/a^2 + (y' - y'_0)^2/b^2 = 1 \quad (15a),$$

where

$$a = (1 + \lambda_2) c', \quad b = (1 - \lambda_2) c' \quad (15b).$$

The curve  $\Gamma_1$  mapped on  $\gamma$  by (13) ( $\lambda_1$  complex) may thus be identified with the inverse of the ellipse (15) with respect to the origin, where

$$\lambda_1 = 2 z'_0 / (a + b), \quad \lambda_2 = (a - b) / (a + b), \quad c = 2 d^2 / (a + b) \quad (16),$$

$d$  being the radius of the circle of inversion. If the function (13) is to map the area inside  $\Gamma_1$  on the area inside  $\gamma$  then the centre of inversion must lie inside  $\Gamma_1'$  and the condition for this is

$$x'_0{}^2/a^2 + y'_0{}^2/b^2 < 1 \quad (17a).$$

From (14b) and (15b) it follows that (17a) is equivalent to

$$(\Re \lambda_1)^2 / (1 + \lambda_2)^2 + (\Im \lambda_1)^2 / (1 - \lambda_2)^2 < 1 \quad (17b).$$

If  $\lambda_1$  is real the closed curve  $\Gamma_1$  becomes symmetrical about the real axis and the condition (17b) gives

$$-2 \leq -1 - \lambda_2 < \lambda_1 < 1 + \lambda_2 \leq 2 \quad (18).$$

The two curves  $\Gamma_1$  corresponding to  $\lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = 0.2$  ( $a > b$ ) and  $\lambda_1 = 0.2, \lambda_2 = -0.2$  ( $a < b$ ) are shown in Fig. 1. These are the inverses of the two ellipses

$$(x-3)^2/36 + y^2/16 = 1, \quad (x-1)^2/16 + y^2/36 = 1 \quad \dots \dots \dots (19),$$

respectively, with respect to the origin. For  $\lambda_1 = 0$  we get the lemniscate of BOOTH. The bending of a clamped thin plate with this shape has been recently discussed when the plate is either uniformly loaded [6] or singularly loaded by an isolated force or couple [5]. The limiting case in which  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$  leads to an infinite plate bounded by the two semi-infinite lines  $x \geq \frac{1}{2}c, y = 0$  and  $x \leq -\frac{1}{2}c, y = 0$ . When this plate is clamped along these two semi-infinite lines and is loaded by a normal force at an arbitrary point the problem was discussed by DEAN [8].

If  $1 > \lambda_2 > 0$  ( $a > b$ ) and  $\lambda_1^2 = 4\lambda_2$  the centre of inversion coincides with one or other of the two foci of the ellipse  $\Gamma'_1$ . The mapping function takes the form

$$z = c\zeta/(1 \pm \lambda_2^{1/2}\zeta)^2 \quad \dots \dots (20),$$

and the corresponding contours  $\Gamma_1$  are the two elliptic limacons

$$r = c(1 + \lambda_2 \mp 2\lambda_2^{1/2}\cos\theta)/(1 - \lambda_2)^3 \quad (21).$$

The limiting case in which the centre of inversion lies on the boundary of the ellipse is worthy of consideration. If  $\Gamma'_1$  is the ellipse

$$(x' - a)^2/a^2 + y'^2/b^2 = 1 \quad \dots (22),$$

then  $\Gamma_1$  is mapped on  $\gamma$  by (13) in which  $\lambda_1 = 2a/(a+b)$ . Using (16), we see that  $\lambda_1 = 1 + \lambda_2$ . With this value inserted in (13), the mapping function becomes

$$z = c\zeta/\{(1 + \zeta)(1 + \lambda_2\zeta)\} \quad \dots (23).$$

Setting  $\zeta = e^{i\psi}$  in (23) and separating real and imaginary parts the parametric equations of  $\Gamma_1$  are obtained as

$$x = \frac{c(1 + \lambda_2)}{2(1 + \lambda_2^2 + 2\lambda_2\cos\psi)}, \quad y = \frac{c(1 - \lambda_2)\tan\frac{1}{2}\psi}{2(1 + \lambda_2^2 + 2\lambda_2\cos\psi)} \quad (24).$$

In this case it is easily seen that the straight line

$$x = c(1 + \lambda_2)/2(1 - \lambda_2)^2$$

is an asymptote to  $\Gamma_1$ . The boundaries  $\Gamma_1$  corresponding to the four values  $-0.2, 0, 0.2$  and  $1$  of  $\lambda_2$  are drawn together with the asymptotes to the first and third curves in Fig. 2. These curves are obtained by inverting with respect to the origin the ellipses (22) in which  $a$  is fixed and  $b$  takes the values  $\frac{3}{2}a, a, \frac{2}{3}a$  and  $0$ , respectively. The particular case  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$  is of special interest and leads to the mapping function

$$z = c\zeta/(1 + \zeta)^2 \quad \dots \dots \dots (25),$$

which maps an infinite plane bounded by the semi-infinite straight line  $x \geq \frac{1}{4}c, y = 0$  on the area inside  $\gamma$  in the  $\zeta$ -plane.

(b) The case  $n = 2$ . Here we deal with the mapping function

$$z = c\zeta/(1 + \lambda_1\zeta^2 + \lambda_2\zeta^4) \quad \dots \dots \dots (26).$$

The parametric equations (10) for  $\Gamma'_2$  reduce to

$$x'/c' = (1 + \lambda_1)\cos\psi + \lambda_2\cos 3\psi, \quad y'/c' = (1 - \lambda_1)\sin\psi - \lambda_2\sin 3\psi \quad \dots (27),$$

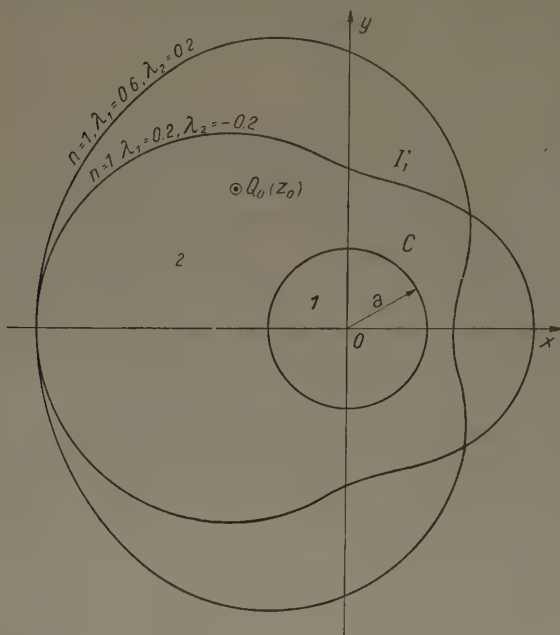


Fig. 1. Inverses of ellipse with respect to points on major and minor axes



which represent a family of ovaloids symmetrical with respect to the coordinate axes. If  $1 + \lambda_1 = -9\lambda_2$  then  $\Gamma'_2$  is a curvilinear rectangle whose sides are parallel to the coordinate axes and are of lengths  $-16\lambda_2 c'$  and  $4(1 + 5\lambda_2) c'$ . For  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{1}{9}$  the contour  $\Gamma'_2$  is a square hypotrochoid while if  $\lambda_1 = \frac{2}{7}, \lambda_2 = -\frac{1}{7}$  then the ratio between the sides of the curvilinear rectangle  $\Gamma'_2$  is 2:1. The latter curve and its inverse with respect to a concentric circle are shown in Fig. 3. Problems connected with the contour  $\Gamma'_2$  have been solved by many authors. See [3], p. 762. In this paper we shall consider the bending of clamped plates bounded by  $\Gamma_2$  and subject to various loadings.

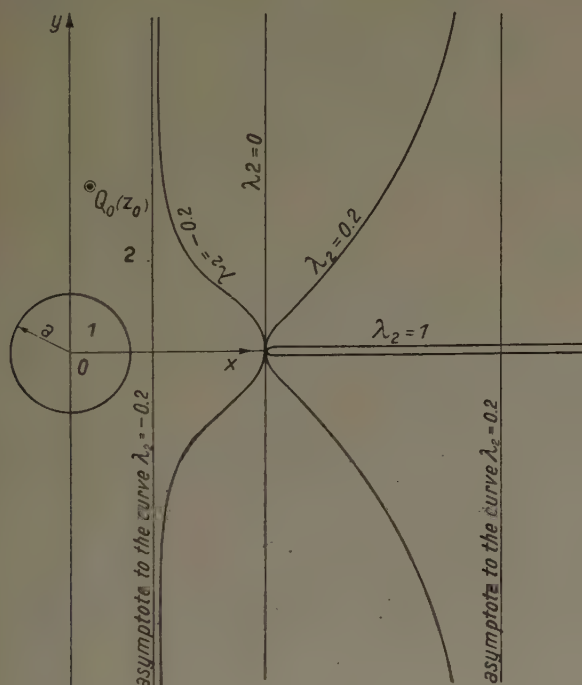


Fig. 2. Inverses of ellipse with respect to a vertex

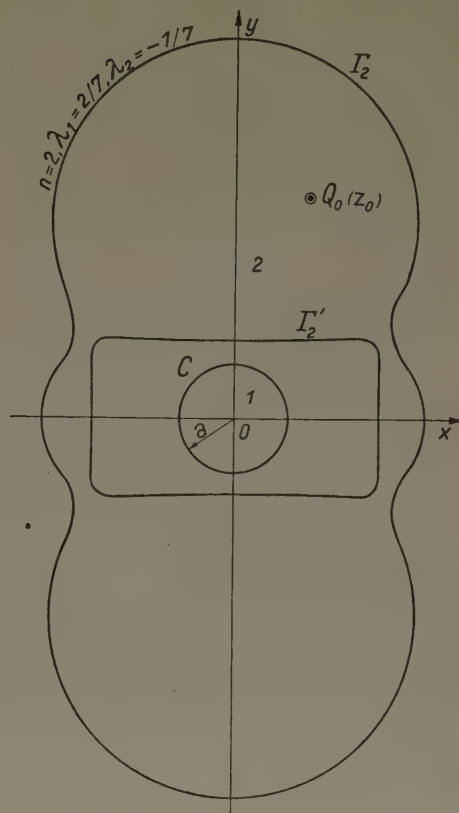


Fig. 3. Plate with the shape of the inverse of a curvilinear rectangle

(c) The case  $n > 2$ . It is known that the function

$$z' = c' \zeta' \left[ 1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{n} \left( \frac{2}{n} - 1 \right) \left( \frac{2}{n} - 2 \right) \cdots \left( \frac{2}{n} - m + 1 \right) \frac{\zeta'^{-m n}}{m! (m n - 1)} \right] \quad (n > 2) \quad (28)$$

maps the infinite region outside a regular rectilinear polygon with  $n$  sides in the  $z'$ -plane on the area outside  $\gamma$  in the  $\zeta'$ -plane. As an approximation to (28) we take

$$z' = c' \zeta' (1 + \lambda_1 \zeta'^{-n} + \lambda_2 \zeta'^{-2n}) \quad \dots \dots \dots (29a),$$

where

$$\lambda_1 = -2/\{n(n-1)\}, \quad \lambda_2 = (n-2)/\{n^2(2n-1)\} \quad \dots \dots \dots (29b).$$

If  $z$  is the inverse of  $z'$  with respect to  $|z'| = d$  and  $\zeta$  is the inverse of  $\zeta'$  with respect to  $|\zeta'| = 1$  then  $z' \bar{z} = d^2$ ,  $\zeta' \bar{\zeta} = 1$  and substituting in (29a) yields (8). With the values (29b) the curve  $\Gamma'_n$  is approximately a regular rectilinear polygon with  $n$  sides and the inverse curve  $\Gamma_n$  consists of the union of  $n$  equal and approximately circular arcs each of which passes through

the centre and two consecutive vertices of a regular rectilinear polygon with  $n$  sides. Figs 4 and 5 show the contours  $\Gamma'_n$  and  $\Gamma_n$  corresponding to  $n = 3$ ,  $\lambda_1 = -\frac{1}{3}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{45}$  and  $n = 4$ ,  $\lambda_1 = -\frac{1}{6}$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{56}$ . For larger values of  $n$  the plate bounded by  $\Gamma_n$  is a grooved plate of a special type.

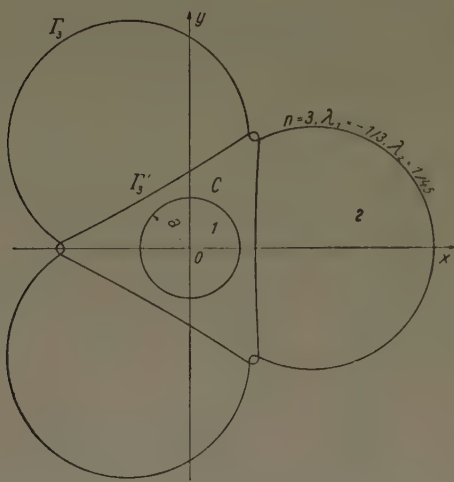


Fig. 4. Plate bounded by three equal and approximately circular arcs

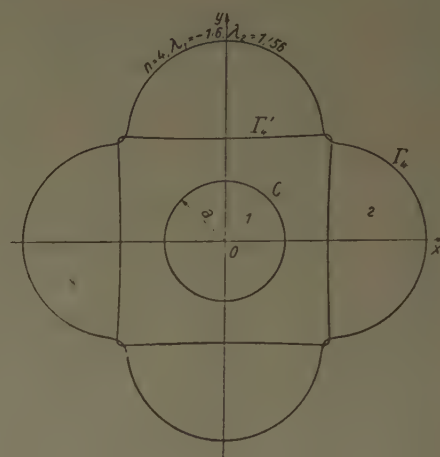


Fig. 5. Plate bounded by four equal and approximately semi-circular arcs

### 5. Deflexion of Clamped Curvilinear Plates Symmetrically Loaded Over the Area of a Circle

We now consider the bending of any of the various plates bounded by  $\Gamma_n$  when the plate is subject to the transverse pressure

$$p_1 = p_0 r^{s-2} \quad (s \geq 2) \text{ for } r \leq a, \quad p_2 = 0 \text{ for } r > a \quad (30).$$

For  $s = 2$  we have uniform loading over the area of the circle<sup>1)</sup>  $C$  of radius  $a$ .

The total load  $P_0$  on the plate equals  $2\pi p_0 a^2/s$  and the particular integrals may be taken as

$$W_2(z, \bar{z}) = 0, \quad W_1(z, \bar{z}) = -p_0(z\bar{z})^{s'/2}/s^2 s'^2 D, \quad s' = s + 2 \quad (31).$$

It was proved [4] that the conditions expressing the physical continuity required across  $C$  are satisfied by taking

$$[\Omega(z)]_2^1 = k z \left( \frac{1}{s} - 1 + \log \frac{z}{a} \right), \quad [\omega(z)]_2^1 = k a'^2 \left( \frac{1}{s'} + 1 + \log \frac{z}{a} \right) \quad (32)$$

along  $C$ , where

$$k = P_0/(16\pi D), \quad a'^2 = s a^2/s' \quad (33).$$

The complex potentials  $\Omega_2(z)$  and  $\omega_2(z)$  will now be taken in the forms

$$\Omega_2(z) = \Phi_2(\zeta) = k \left[ c \zeta \left\{ A + \frac{A_0 + A_1 \zeta^n}{1 + \lambda_1 \zeta^n + \lambda_2 \zeta^{2n}} \right\} - z \log \zeta \right] \quad (34a),$$

$$\omega_2(z) = \chi_2(\zeta) = k \left[ c^2 \left\{ B + \frac{B_0 + B_1 \zeta^n}{1 + \lambda_1 \zeta^n + \lambda_2 \zeta^{2n}} \right\} - a'^2 \log \zeta \right] \quad (34b),$$

where  $A$ ,  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $B_0$  and  $B_1$  are real constants to be determined from the boundary conditions. Applying (34) to (32) and using (8) we get

$$\Omega_1(z) = \Phi_1(\zeta) = k \left[ c \zeta \left\{ A' + \frac{A'_0 + A_1 \zeta^n}{1 + \lambda_1 \zeta^n + \lambda_2 \zeta^{2n}} \right\} + z \log \frac{z}{a \zeta} \right] \quad (35a),$$

$$\omega_1(z) = \chi_1(\zeta) = k \left[ c^2 \left\{ B' + \frac{B_0 + B_1 \zeta^n}{1 + \lambda_1 \zeta^n + \lambda_2 \zeta^{2n}} \right\} + a'^2 \log \frac{z}{a \zeta} \right] \quad (35b),$$

<sup>1)</sup> By considering loads distributed over the area of a circle we avoid the infinite stresses created at the points of application of concentrated loads on plates. See reference [17] for a detailed study of this topic.



where

$$A'_0 = A_0 + \frac{1}{s} - 1, \quad B' = B + \left(1 + \frac{1}{s'}\right) q, \quad q = \frac{a'^2}{c^2} \quad \dots \quad (36).$$

Introducing (31), (34) and (35) in (1) we obtain

$$\frac{w_1}{2k} = \Re \left[ c z \left( A \bar{\zeta} + \frac{B_0}{\zeta} + B_1 \zeta^{n-1} \right) + r^2 (A'_0 + A_1 \zeta^n) \right] + B' c^2 + (r^2 + a'^2) \log \frac{r}{a \varrho} - \frac{4 r s'}{s s'^2 a^s} \quad (37a),$$

$$\frac{w_2}{2k} = \Re \left[ c z \left( A \bar{\zeta} + \frac{B_0}{\zeta} + B_1 \zeta^{n-1} \right) + r^2 (A_0 + A_1 \zeta^n) \right] + B c^2 - (r^2 + a'^2) \log \varrho \quad \dots \quad (37b).$$

Setting  $z = \zeta = 0$  in (37a) and substituting for  $k$ ,  $B'$  from (33), (36) we get for the deflexion at the origin

$$w_0 = \frac{P_0}{8\pi D} \left[ (B + B_0) c^2 + \left(1 + \frac{1}{s'}\right) a'^2 + a'^2 \log \frac{c}{a} \right] \quad \dots \quad (38).$$

We now proceed to determine the six constants  $A$ ,  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $B_0$  and  $B_1$  from the boundary conditions (7). Substituting from (8) and (34) in (7a) we get the identity

$$(A + B_0) \{2 + \lambda_1 (t + t^{-1}) + \lambda_2 (t^2 + t^{-2})\} + \{A_1 + (1 + \lambda_2) B_1\} (t + t^{-1}) + 2 A_0 + 2 \lambda_1 B_1 + 2 B (1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2) (1 + \lambda_1 t^{-1} + \lambda_2 t^{-2}) \equiv 0 \quad \dots \quad (39),$$

where  $t = \sigma^n$ . Equating the coefficients of powers of  $t$  in (39) separately to zero we obtain the three linear equations

$$\left. \begin{aligned} A + A_0 + (1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2) B + B_0 + \lambda_1 B_1 &= 0, \\ \lambda_1 A + A_1 + 2 \lambda_1 (1 + \lambda_2) B + \lambda_1 B_0 + (1 + \lambda_2) B_1 &= 0, \\ \lambda_2 (A + 2 B + B_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (40).$$

Introducing (8) and (34) in (7b) leads to the identity

$$\begin{aligned} &\{A - q (1 + \lambda_1 t^{-1} + \lambda_2 t^{-2})\} (1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2)^2 + \{A_0 - 1 + (n+1) A_1 t\} (1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2) \\ &+ \{A_0 + A_1 t^{-1} + A (1 + \lambda_1 t^{-1} + \lambda_2 t^{-2})\} (1 - n_1 \lambda_1 t - n_2 \lambda_2 t^2) - n t (A_0 + A_1 t) (\lambda_1 + 2 \lambda_2 t) \\ &+ n (B_1 - \lambda_1 B_0 - 2 \lambda_2 B_0 t - \lambda_2 B_1 t^2) (t + \lambda_1 + \lambda_2 t^{-1}) \equiv 0 \quad \dots \quad (41), \end{aligned}$$

where the notations of (11) are used. Equating the coefficients of  $t^4$  or  $t^{-2}$  in (41) to zero yields

$$A = q = \frac{a'^2}{c^2} \quad \dots \quad (42).$$

Inserting this value in (41) and equating the coefficients of the remaining powers of  $t$  to zero we obtain the five equations

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 (n_1 A_1 + n B_1 + \lambda_1 \lambda_2 q) &= 0, \\ \lambda_1 A_1 - 2 n_2 \lambda_2 A_0 - n \lambda_2 (2 B_0 + \lambda_1 B_1) &= \lambda_2 \{1 + (n_2 + 2 \lambda_1^2 + \lambda_2^2) q\}, \\ (n+1 - n_2 \lambda_2) A_1 - 2 n_1 \lambda_1 A_0 + n (1 - \lambda_2^2) B_1 - n \lambda_1 (1 + 2 \lambda_2) B_0 \\ &= \lambda_1 [1 + \{n_1 + (2n+1) \lambda_2 + \lambda_1^2 + 2 \lambda_2^2\} q], \\ 2 A_0 - n_1 \lambda_1 A_1 - n (\lambda_1^2 + 2 \lambda_2^2) B_0 + n \lambda_1 B_1 &= 1 + \{(n+1 + \lambda_2) \lambda_1^2 + (2n+1) \lambda_2^2 - 1\} q, \\ A_1 + n \lambda_2 (B_1 - \lambda_1 B_0) &= (n+1) \lambda_1 \lambda_2 q \end{aligned} \right\} \quad (43).$$

It can be shown that the eight linear equations (40) and (43) are consistent in the five unknowns  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$ ,  $B_0$  and  $B_1$ . Solving them we find

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} J [(1 - \lambda_2^2) (1 - n_1 \lambda_2) \{1 - (1 - \lambda_2^2) q\} + 2 \lambda_1^2 (1 + n \lambda_2 - \lambda_2^2 + n \lambda_2^3) q \\ &\quad - \lambda_1^2 (1 + n_1 \lambda_2) (1 + \lambda_1^2 q)], \\ A_1 &= \lambda_1 \lambda_2 J [(1 + \lambda_2) (n+1 - n \lambda_2 + n_2 \lambda_2^2) q - \lambda_1^2 (1 + n_1 \lambda_2) q - n], \\ B &= \frac{1}{2} J [(1 - n_1 \lambda_2) \{1 - (1 - \lambda_2^2) q\} + \lambda_1^2 (1 + n_1 \lambda_2) q], \\ B_0 &= -J [(1 - n_1 \lambda_2) (1 + 2 n \lambda_2^2 q) + n \lambda_1^2 (1 + n_1 \lambda_2) q], \\ B_1 &= \lambda_1 \lambda_2 J [n_1 - n (1 + \lambda_2^2) q], \\ J^{-1} &= (1 - n_1 \lambda_2) (1 + n_2 \lambda_2^2) + n_1 (1 + n_1 \lambda_2) \lambda_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (44).$$

For convenience we introduce the notation

$$t_n = 1 - \varrho^{2n} \quad \dots \quad (45),$$

and substituting from (8), (36) and (40) in (37) we find

$$\begin{aligned} -\frac{w_1}{2k} = & a'^2 \left( \frac{1}{2} t_1 + \log \frac{\varrho a}{r} \right) + \frac{r^2}{\varrho^2} \left[ \varrho^2 \log \frac{\varrho a}{r} + (t_1 + \lambda_1^2 \varrho^2 t_{n_1} + \lambda_2^2 \varrho^2 t_{n_2}) B + \lambda_1 B_1 \varrho^2 t_{n_1} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} q t_1 (1 - \lambda_1^2 \varrho^{2n} - \lambda_2^2 \varrho^{4n}) - \varrho^n \cos n \psi \{ \lambda_1 \lambda_2 (q \varrho^{2n} t_1 - 2 B \varrho^2 t_{n_1}) + (t_1 - \lambda_2 \varrho^2 t_{n_1}) B_1 \} \right] \\ & + \left( 1 - \frac{1}{s} \right) r^2 - \left( 1 + \frac{1}{s'} \right) a'^2 + \frac{4 r s'}{s s'^2 a^2} \dots \quad (46a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{w_2}{2k} = & a'^2 \left( \frac{1}{2} t_1 + \log \varrho \right) + \frac{r^2}{\varrho^2} \left[ \varrho^2 \log \varrho + (t_1 + \lambda_1^2 \varrho^2 t_{n_1} + \lambda_2^2 \varrho^2 t_{n_2}) B + \lambda_1 B_1 \varrho^2 t_{n_1} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} q t_1 (1 - \lambda_1^2 \varrho^{2n} - \lambda_2^2 \varrho^{4n}) - \varrho^n \cos n \psi \{ \lambda_1 \lambda_2 (q \varrho^{2n} t_1 - 2 B \varrho^2 t_{n_1}) + (t_1 - \lambda_2 \varrho^2 t_{n_1}) B_1 \} \right] \quad (46b), \end{aligned}$$

where  $B$  and  $B_1$  are given in (44). From the form (46b) it can be verified that the boundary conditions  $w_2 = 0$ ,  $\partial w_2 / \partial \varrho = 0$  are satisfied on  $\varrho = 1$ . Substituting for  $B$  and  $B_1$  from (44) in (38) we get

$$w_0 = \frac{P_0 c^2}{16 \pi D} \left[ q \left( 1 + \frac{2}{s'} + 2 \log \frac{c}{a} \right) - \frac{(1 - n_1 \lambda_2) (1 + 2 n \lambda_2^2 q) + n \lambda_1^2 (1 + n_1 \lambda_2) q}{(1 - n_1 \lambda_2) (1 + n_2 \lambda_2^2) + n_1 \lambda_1^2 (1 + n_1 \lambda_2)} \right] \quad (47).$$

Setting  $q = 0$  in (46b) yields the deflexion in any of the clamped plates discussed in section 4 due to an isolated load at the origin. See Figs 1—5.

Appropriate solutions for plates mapped on the unit circle by  $z = \frac{c \zeta}{1 + \lambda_1 \zeta^n}$  ( $n \geq 1$ ) and symmetrically loaded over the circle  $r = a$  immediately follow from the foregoing results by putting  $\lambda_2 = 0$ . For a point load at the origin the complex potentials and deflexion are obtained by setting  $\lambda_2 = q = 0$  in (34), (42), (44), (46b) and the results agree with those given by eqns (3.37) of [5].

The special case  $n = 1$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $|\lambda_1| < 1$  is worthy of consideration. Here we deal with a clamped circular plate in the  $z$ -plane whose centre is the point  $\left( \frac{c \lambda_1}{\lambda_1^2 - 1}, 0 \right)$  and with radius  $\frac{c}{1 - \lambda_1^2}$ . When this plate is subject to the symmetrical loading (30) over the eccentric circle  $r = a$ , the complex potentials  $\Omega_2$  and  $\omega_2$  are

$$\left. \begin{aligned} \Omega_2 = & k \left[ c q \zeta + \frac{1}{2} (1 - \lambda_1^2) \{ 1 - (1 - \lambda_1^2) q \} z - z \log \zeta \right], \\ \omega_2 = & k c^2 \left[ \frac{1}{2} \{ 1 - (1 - \lambda_1^2) q \} - \frac{1 + \lambda_1^2 q}{1 + \lambda_1 \zeta} - q \log \zeta \right] \end{aligned} \right\} \dots \quad (48),$$

while  $\Omega_1$  and  $\omega_1$  are found by substitution from (48) in (32). A real variable method of solving a special case of this problem (uniform pressure over the eccentric circle) was adopted by SCHMIDT [11]. The same problem is also included as a particular case in a previous paper [1] where the bending of an elastically restrained circular plate symmetrically loaded over an eccentric circle is discussed. The limiting case when  $\lambda_1 \rightarrow 1$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $z \rightarrow \frac{c \zeta}{1 + \zeta}$  leads to the clamped half-plane to the left of  $x = \frac{1}{2} c$  (Fig. 2) and it is verified that the results obtained here for this problem agree with those furnished by eqns (3.1) of [2].

In the case  $n = 1$  and  $\lambda_1^2 = 4 \lambda_2$  we have a clamped plate with the shape of an elliptic limaçon subject to symmetrical loading over a circle whose centre coincides with the focus of the limaçon. When the same plate is under the same loading distributed over a circle concentric<sup>2)</sup> with the plate the mapping function  $z = c \zeta (1 + m \zeta)$  ( $|m| \leq \frac{1}{2}$ ) was used [4] to find the deflexion.

<sup>2)</sup> The two elliptic limaçons  $r = c (1 \pm 2 m \cos \theta)$  have their foci at the origin and their centres at the points  $(\pm m c, 0)$ .

### 6. Clamping Couples

The stress couples round the edge of a thin clamped plate are known to be given by the following simple formulae credited to STEVENSON [14]:

$$\tilde{n}\tilde{s} = -P V^2 w, \quad \tilde{s}\tilde{n} = -\nu \tilde{n}\tilde{s}, \quad \tilde{n}\tilde{n} = \tilde{s}\tilde{s} = 0 \quad \dots \dots \dots (49),$$

where  $P = D/2h$  and  $\nu$  is POISSON'S ratio. Substituting for  $w_2$  from (1) and remembering that  $W_2(z, \bar{z}) = 0$ , the clamping couple is obtained as

$$\tilde{n}\tilde{s} = -8P \Re \frac{\Phi_2'(\sigma)}{z'(\sigma)} \quad \dots \dots \dots (50),$$

where  $\sigma = e^{i\psi}$  is any point on  $\gamma$  and  $z, \Phi_2$  are given by (8), (34a), respectively. Inserting the value of  $k$  from (33) leads to

$$(\tilde{n}\tilde{s})_{\psi=1} = -\frac{P_0}{4\pi h} \left[ A_0 + A_1 \cos n\psi + \Re \frac{(1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2) \{ (1 + \lambda_1 t + \lambda_2 t^2) q + n A_1 t - 1 \}}{1 - n_1 \lambda_1 t - n_2 \lambda_2 t^2} \right] \quad (51),$$

where  $t = e^{ni\psi}$  and  $A_0, A_1$  are given in (44). Putting  $\psi = 0$  in (51) yields the clamping couples at the mid points of the curvilinear edges of the plate as

$$(\tilde{n}\tilde{s})_{\zeta=1} = -\frac{P_0}{4\pi h} \left[ A_0 + \frac{n(1 - \lambda_2) A_1 + (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \{ (1 + \lambda_1 + \lambda_2) q + A_1 - 1 \}}{1 - n_1 \lambda_1 - n_2 \lambda_2} \right] \quad (52).$$

For the family of plates mapped on the unit circle by  $z = \frac{c\zeta}{1 + \lambda_1 \zeta^n}$ , the expression (51) simplifies to

$$(\tilde{n}\tilde{s})_{\psi=1} = -\frac{P_0}{4\pi h} \left[ \frac{(1 - \lambda_1^2) \{ 1 - (1 - \lambda_1^2) q \}}{2(1 + n_1 \lambda_1^2)} + \Re \frac{(1 + \lambda_1 t) (q - 1 + \lambda_1 q t)}{1 - n_1 \lambda_1 t} \right] \quad \dots (53),$$

which gives

$$(\tilde{n}\tilde{s})_{\psi=1} = \frac{P_0}{8\pi h} \left[ 2 + 2q \left( \frac{\lambda_1}{n_1} \cos n\psi - 1 \right) - \frac{(1 - \lambda_1^2) \{ 1 - (1 - \lambda_1^2) q \}}{1 + n_1 \lambda_1^2} + \frac{n}{n_1^2} (nq - n_1) \left\{ 1 - \frac{1 - n_1^2 \lambda_1^2}{1 + n_1^2 \lambda_1^2 - 2n_1 \lambda_1 \cos n\psi} \right\} \right] \quad \dots (54a),$$

$$(\tilde{n}\tilde{s})_{\zeta=1} = \frac{P_0(1 + \lambda_1)}{8\pi h} \left[ 2 \frac{\{ 1 - (1 + \lambda_1) q \}}{1 - n_1 \lambda_1} - \frac{(1 - \lambda_1) \{ 1 - (1 - \lambda_1^2) q \}}{1 + n_1 \lambda_1^2} \right] \quad \dots (54b)$$

if  $n > 1$  and

$$(\tilde{n}\tilde{s})_{\psi=1} = \frac{P_0}{8\pi h} (1 + \lambda_1^2 + 2\lambda_1 \cos \psi) (1 - q + \lambda_1^2 q - 2\lambda_1 q \cos \psi) = \frac{P_0 c^2}{8\pi h r^2} \left( 1 + 2\lambda_1^2 q - \frac{c^2}{r^2} \right) \quad (54c)$$

in the special case  $n = 1$ .

### 7. Moments and Shears at the Centre

It is known [6] that the moments and shears at any point of the plate mapped on the unit circle by (3) are furnished by

$$\left. \begin{aligned} \varrho \tilde{\psi} - \tilde{\psi} \varrho &= -4P(1 + \nu) \left[ 2 \Re G_j(\zeta) + \frac{\partial^2 W_j}{\partial z \partial \bar{z}} \right], \\ \varrho \tilde{\psi} + \tilde{\psi} \varrho + 2i \varrho \tilde{\varrho} &= -\frac{4P(1 - \nu) \zeta^2}{\varrho^2 \bar{z}'(\bar{\zeta})} \left[ \bar{z}(\bar{\zeta}) G_j'(\zeta) + g_j'(\zeta) + z'(\zeta) \frac{\partial^2 W_j}{\partial \bar{z}^2} \right], \\ \varrho \tilde{Z} - i \psi \tilde{Z} &= -\frac{8P\zeta}{\varrho |z'(\zeta)|} \left[ G_j'(\zeta) + z'(\zeta) \frac{\partial^2 W_j}{\partial z^2 \partial \bar{z}} \right], \end{aligned} \right\} \quad \dots (55).$$

where

$$G_j(\zeta) = \frac{\Phi_j(\zeta)}{z'(\zeta)}, \quad g_j(\zeta) = \frac{\chi_j'(\zeta)}{z'(\zeta)} \quad (j = 1, 2)$$



Introducing (8), (31), (35) and (36) in these formulae and then putting  $\zeta = 0$  we find that the central values of the bending and twisting moments are:

Case (a).  $n = 1$

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{\varphi}_0 &= \frac{P_0}{8\pi h} \left[ \frac{1}{2} (1-\nu) \{(\lambda_1^2 + 2\lambda_2)q + 2\lambda_2 B_0\} \cos 2\psi \mp (1+\nu) \left( A_0 + q + \frac{1}{s} + \log \frac{c}{a} - 1 \right) \right], \\ \widetilde{\varrho}_0 &= \frac{P_0}{16\pi h} (1-\nu) \{(\lambda_1^2 + 2\lambda_2)q + 2\lambda_2 B_0\} \sin 2\psi \end{aligned} \right\} \quad (56).$$

Case (b).  $n = 2$

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{\varphi}_0 &= \frac{P_0}{8\pi h} \left[ (1-\nu) (\lambda_1 B_0 - B_1) \cos 2\psi \mp (1+\nu) \left( A_0 + q + \frac{1}{s} + \log \frac{c}{a} - 1 \right) \right], \\ \widetilde{\varrho}_0 &= \frac{P_0}{8\pi h} (1-\nu) (\lambda_1 B_0 - B_1) \sin 2\psi \end{aligned} \right\} \quad (57).$$

Case (c).  $n > 2$

$$\widetilde{\varphi}_0 = -\widetilde{\varphi}_0 = -\frac{P_0}{8\pi h} (1+\nu) \left( A_0 + q + \frac{1}{s} + \log \frac{c}{a} - 1 \right), \quad \widetilde{\varrho}_0 = 0 \quad \dots (58).$$

In cases (a) and (b) the three constants  $A_0$ ,  $B_0$  and  $B_1$  are obtained by putting  $n = 1$  and  $n = 2$  in their values given by (44). In any of the three foregoing cases the shearing forces  $\varrho Z$  and  $\varphi Z$  vanish at the centre.

## 8. Appropriate Forms for the Complex Potentials of a Singularly Loaded Plate Mapped on the Unit Circle by a Given Transformation

Let us consider the bending of a thin clamped plate conformally mapped on the unit circle by (3) and loaded by an isolated load  $P_0$  at  $z_0(\zeta_0)$ . It was shown [5] that the complex potentials and deflexion at any point  $z(\zeta)$  of the plate may conveniently be taken in the forms

$$\Omega(z) = k \left[ F(\zeta) - (z - z_0) \log \frac{\zeta - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} \right], \quad \omega(z) = k \left[ f(\zeta) + \bar{z}_0 (z - z_0) \log \frac{\zeta - \zeta_0}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} \right] \quad (59a),$$

$$w = 2k \left[ |z - z_0|^2 \log \left| \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}{\zeta - \zeta_0} \right| + \Re \{ \bar{z}(\bar{\zeta}) F(\zeta) + f(\zeta) \} \right] \quad \dots (59b),$$

where  $k = P_0/(16\pi D)$  and  $F(\zeta)$ ,  $f(\zeta)$  are regular functions of  $\zeta$  ( $|\zeta| \leq 1$ ) which have to be determined from the boundary conditions. Substituting from (59a) in (7) we find that the conditions for a clamped edge give

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}(\sigma^{-1}) F(\sigma) + z(\sigma) \bar{F}(\sigma^{-1}) + f(\sigma) + \bar{f}(\sigma^{-1}) &= 0, \\ z'(\sigma) \bar{F}(\sigma^{-1}) + \bar{z}(\sigma^{-1}) F'(\sigma) + f'(\sigma) &= \frac{(1 - \varrho_0^2)(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0)}{\sigma(\zeta - \zeta_0)(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}_0)} \text{ on } \gamma \end{aligned} \right\} \quad \dots (60).$$

For a clamped plate mapped on the unit circle by (3) and loaded by an isolated couple at the origin  $z = 0$  it was also shown [5] that the appropriate forms for the complex potentials and deflexion are

$$\Omega(z) = K [F(\zeta) + \lambda \log \zeta], \quad \omega(z) = K [f(\zeta) + \bar{\lambda} z \log \zeta] \quad \dots (61a),$$

$$w = 2K [(\bar{\lambda} z + \lambda \bar{z}) \log \varrho + \Re \{ \bar{z}(\bar{\zeta}) F(\zeta) + f(\zeta) \}] \quad \dots (61b),$$

where

$$K = M/(16\pi D), \quad \lambda = e^{i\alpha} \quad \dots (62),$$

and  $M$  is the magnitude of the couple nucleus operating at the origin in a plane perpendicular to the plate and making an angle  $\alpha$  with the positive direction of the  $x$ -axis. Substituting from (61a) in (7) yields

$$\left. \begin{aligned} \bar{z}(\sigma^{-1}) F(\sigma) + z(\sigma) \bar{F}(\sigma^{-1}) + f(\sigma) + \bar{f}(\sigma^{-1}) &= 0, \\ \sigma [z'(\sigma) \bar{F}(\sigma^{-1}) + \bar{z}(\sigma^{-1}) F'(\sigma) + f'(\sigma)] + \bar{\lambda} z(\sigma) + \lambda \bar{z}(\sigma^{-1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (63).$$

### 9. Clamped and Singularly Loaded Slabs Bounded by the Inverses of an Ellipse with Respect to Internal or Boundary Points

In section 4 it was shown that the transformation (13), in which  $\lambda_2$  is real ( $|\lambda_2| \leq 1$ ) and  $\lambda_1$  is a complex constant subject to the restriction (17b), maps the plate bounded by the inverse of the ellipse  $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$  with respect to any point inside it on the unit circle in the  $\zeta$ -plane. We now assume that the potentials (59a) solve the problem of bending of such a plate when it is clamped and carrying a single load at the point  $z_0(\zeta_0)$ . The functions  $F(\zeta)$  and  $f(\zeta)$  will be assumed in the forms

$$F(\zeta) = c \left[ A - \frac{A_0 + A_1 \zeta}{1 + \lambda_1 \zeta + \lambda_2 \zeta^2} \right], \quad f(\zeta) = c^2 \left[ B + \frac{B_0}{1 + \lambda_1 \zeta + \lambda_2 \zeta^2} \right] \quad \dots (64),$$

where  $A$ ,  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$  and  $B_0$  are, in general, complex constants to be determined. Substituting from (64) and (13) in (60), clearing out fractions and equating the coefficients of powers of  $\sigma$  in the two resulting identities to zero we get a consistent system of equations satisfied by

$$\left. \begin{aligned} A &= -\mu(\zeta_0 - \bar{\lambda}_1 \mu'), & A_0 &= \mu(\zeta_0 + \lambda_2 \bar{\zeta}_0 + \bar{\lambda}_1 \mu'), \\ A_1 &= \frac{1}{2} \mu [\lambda_1 \bar{\zeta}_0 - \bar{\lambda}_1 \bar{\zeta}_0 - \mu' (1 + \lambda_1 \bar{\lambda}_1 - \lambda_2^2)], \\ B_0 &= \frac{1}{2} \mu \bar{\mu}', & B &= -\mu \bar{\mu}' \end{aligned} \right\} \dots (65),$$

where

$$\mu = \frac{1 - \varrho_0^2}{|1 + \lambda_1 \bar{\zeta}_0 + \lambda_2 \bar{\zeta}_0^2|}, \quad \mu' = \frac{1 + \lambda_2^2 \varrho_0^2}{1 + \lambda_2^2} \dots (66).$$

Introducing (64)–(66) in (59b) we obtain after reduction the deflexion as

$$w = \frac{P_0}{8\pi D} \left[ |z - z_0|^2 \log \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}{\zeta - \bar{\zeta}_0} + 2 \frac{c^2 (1 - \varrho_0^2) (1 - \varrho^2)}{|1 + \lambda_1 \bar{\zeta}_0 + \lambda_2 \bar{\zeta}_0^2| |1 + \lambda_1 \zeta + \lambda_2 \zeta^2|} \left\{ \lambda_2 (\zeta_0 \zeta + \bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}) - \frac{(1 + \lambda_2^2 \varrho_0^2) (1 + \lambda_2^2 \varrho^2)}{1 + \lambda_2^2} \right\} \right] \quad (67),$$

which includes and is a generalisation of eqn (4.7) of [5]. Some interesting special and limiting cases of (67) will now be considered.

If  $1 > \lambda_2 > 0$  and  $\lambda_1 = 2\lambda_2^{1/2}$  then (13) becomes

$$z = c \zeta / (1 + \lambda_2^{1/2} \zeta)^2 \dots (68),$$

and the plate is bounded by PASCAL's limaçon

$$r = c (1 + \lambda_2 - 2\lambda_2^{1/2} \cos \theta) / (1 - \lambda_2)^2 \dots (69).$$

Setting

$$\lambda_2 = e^{-2\beta} \quad (0 < \beta < \infty), \quad \lambda_2^{1/2} \zeta = e^{it} \quad (\zeta = \varrho e^{i\psi}, \quad t = u + i v) \dots (70a),$$

so that

$$\varrho = e^{\beta - \psi}, \quad \psi = u \dots (70b),$$

we find that (68) and (69) take the forms

$$z = q \sec^2 \frac{1}{2} t \dots (71a),$$

$$r = 2q (\cosh \beta - \cos \theta) \operatorname{cosech}^2 \beta \dots (71b),$$

$$\text{where} \quad q = \frac{1}{4} c \lambda_2^{-1/2} = \frac{1}{4} c e^{\beta} \dots (71c).$$

Equation (70b) shows that the straight line  $v = \beta$  in the  $t$ -plane is mapped on  $\gamma$  in the  $\zeta$ -plane and hence on the boundary of PASCAL's limaçon (71b) in the  $z$ -plane. The solution (67) can be expressed in terms of the curvilinear coordinates  $(u, v)$ . Substituting from (70) and (71c) in (67) we get the following result for the deflexion  $w$  at  $(u, v)$  due to the isolated load  $P_0$  at  $(u_0, v_0)$ :

$$w = \frac{P_0 q^2}{4\pi D} \left[ \frac{z - z_0^2}{2q} \log \left\{ 1 + \frac{2 \sinh (v_0 - \beta) \sinh (v - \beta)}{\cosh (v - v_0) - \cos (u - u_0)} \right\} - \frac{2 \sinh (v_0 - \beta) \sinh (v - \beta)}{(\cosh v_0 + \cos u_0)^2 (\cosh v + \cos u)^2} \left\{ \cos (u + u_0) - \frac{\cosh (v_0 + \beta) \cosh (v + \beta)}{\cosh 2\beta} \right\} \right] \quad (72a),$$

where

$$\left| \frac{z - z_0}{2q} \right|^2 = \frac{\{\cosh(v + v_0) - \cos(u + u_0)\} \{\cosh(v - v_0) - \cos(u - u_0)\}}{(\cosh v_0 + \cos u_0)^2 (\cosh v + \cos u)^2} \quad (72b)$$

As  $v_0$  tends to  $\infty$ ,  $q_0$  tends to zero and the force tends to act at the focus of the limaçon (the origin). The above expression for  $w$  tends to

$$w = \frac{P_0 q^2}{4\pi D} \frac{2(v - \beta) + \operatorname{sech} 2\beta (\sinh 2\beta - \sinh 2v)}{(\cosh v + \cos u)^2} \quad (73)$$

in agreement with the result found by DAS [7].

If  $\lambda_1 = 1 + \lambda_2$  so that we have the transformation (23) then (67) is the deflected form of a half-plane with a curvilinear boss if  $\lambda_2 < 0$  and with a curvilinear notch if  $\lambda_2 > 0$ ; the plate is bounded by and clamped along the curve (24) and is subject to the isolated force  $P_0$  at  $Q_0(z_0)$ . See Fig. 2. For  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0$  the expression (67) reduces to

$$w = \frac{P_0}{8\pi D} \left[ |z - z_0|^2 \log \left| \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}{\zeta - \zeta_0} \right| - \frac{c^2 (1 - \varrho_0^2) (1 - \varrho^2)}{2 |1 + \bar{\zeta}_0|^2 |1 + \zeta|^2} \right] \quad (74)$$

which is equivalent to the well known solution of MICHELL for the bending of an infinitely extended cantilever plate under the action of a single load. In the special case  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = 1$  we have the

mapping function (25) and setting  $z = c' - z'$ , where

$$c' = \frac{1}{4} c \text{ we get}$$

$$z' = c' \frac{(1 - \zeta)^2}{(1 + \zeta)^2} \quad (75)$$

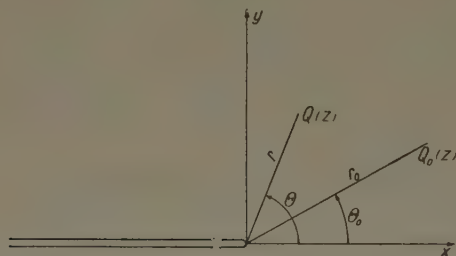


Fig. 6. Infinite plate clamped along the negative half of the real axis and loaded by an isolated force

which maps the infinite plane bounded by the semi-infinite straight line  $x' \leq 0$ ,  $y' = 0$  on the region inside  $\gamma$ . See Fig. 6. Thus for an infinite plate occupying the entire  $z'$ -plane and clamped along the negative half of the real axis eqn (67) of the deflexion surface becomes

$$w = \frac{P_0}{8\pi D} \left[ |z' - z'_0|^2 \log \left| \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}{\zeta - \zeta_0} \right| + \frac{4c'^2 (1 - \varrho_0^2) (1 - \varrho^2)}{|1 + \bar{\zeta}_0|^4 |1 + \zeta|^4} \{2(\bar{\zeta}_0 \zeta + \bar{\zeta}_0 \bar{\zeta}) - (1 + \varrho_0^2)(1 + \varrho^2)\} \right] \quad (76)$$

where  $z'_0(\zeta_0)$  is the point of application of the force  $P_0$ . Using (75), the expression (76) can be written in terms of the polar coordinates  $(r, \theta)$ ,  $(r_0, \theta_0)$  and, leaving out the accents, the closed symmetrical result is

$$w = -\frac{P_0}{16\pi D} \left[ \{r^2 + r_0^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \theta_0)\} \log \frac{r + r_0 - 2(r_0 r)^{1/2} \cos \frac{1}{2}(\theta - \theta_0)}{r + r_0 + 2(r_0 r)^{1/2} \cos \frac{1}{2}(\theta + \theta_0)} \right. \\ \left. + 2(r_0 r)^{1/2} \left\{ 2(r + r_0) \cos \frac{1}{2}\theta_0 \cos \frac{1}{2}\theta + (r_0 r)^{1/2} \sin \theta_0 \sin \theta \right\} \right] \quad (77)$$

Putting  $r = r_0$ ,  $\theta = \theta_0$  in (77), the deflexion under the load is obtained as

$$w_0 = \frac{P_0 r_0^2}{8\pi D} \left( 1 + 3 \cos^2 \frac{1}{2} \theta_0 \right) \quad (78)$$

The particular case of (77) when the load is applied at a point on the positive half of the real axis has been studied by WOJNOWSKY-KRIEGER [16]. Setting  $\theta_0 = 0$  in (77) and expanding the result we get

$$w = \frac{P_0 r_0 r}{\pi D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(r_0/r)^{2m}}{m(m^2 - 4)} \left( 2 \cos \theta \cos \frac{1}{2} m \theta + m \sin \theta \sin \frac{1}{2} m \theta \right) \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (79)$$

if  $r_0 \leq r$  and  $r$  is to interchange with  $r_0$  for  $r \geq r_0$ . It is easily verified that the expansion (79) agrees with that derived by WOJNOWSKY-KRIEGER [16], p. 80 for the same problem, using an entirely different approach.



Let us now consider the bending of a clamped plate mapped on the unit circle by (13) when this plate is acted upon by a couple nucleus at the origin. Here we assume that the appropriate potentials are given by (61a), where  $F(\zeta)$  and  $f(\zeta)$  are taken in the forms (64). Introducing (64) in (63) and equating the coefficients of powers of  $\sigma$  in the resulting identities to zero we get eight compatible equations in the five unknowns  $A$ ,  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $B$  and  $B_0$ . Solving them we get

$$\left. \begin{aligned} A &= -\lambda - \bar{\lambda}/\lambda_2 + \bar{\lambda}_1 B_0, & A_0 &= 2\lambda + (\lambda_2 + \lambda_2^{-1})\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_1 B_0, \\ A_1 &= \frac{1}{2} [(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1/\lambda_2)\lambda + (\bar{\lambda}_1 + \lambda_1/\lambda_2)\bar{\lambda} + (\lambda_2^2 - \lambda_1\bar{\lambda}_1 - 1)B_0], \\ B &= -\frac{1}{2} B_0, & B_0 &= (\lambda\lambda_1 + \bar{\lambda}\bar{\lambda}_1)/(1 + \lambda_2^2) \end{aligned} \right\} \dots (80).$$

With these values inserted in (64) and then in (61b), the deflexion at any point of the plate may be written as

$$w = K \left[ 2(\bar{\lambda}z + \lambda\bar{z}) \log \varrho + \frac{c(1 - \varrho^2)}{|1 + \lambda_1\zeta + \lambda_2\zeta^2|^2} \left\{ \frac{(\lambda\lambda_1 + \bar{\lambda}\bar{\lambda}_1)(1 + \lambda_2^2\varrho^2)}{1 + \lambda_2^2} + \lambda\bar{\zeta} + \bar{\lambda}\zeta + \lambda_2(\lambda\zeta + \bar{\lambda}\bar{\zeta}) \right\} \right] \quad (81),$$

which reduces to eqn (6.9) of [5] in the case  $\lambda_1 = 0$ . Putting  $\lambda_2 = 0$  in (81) and taking  $\lambda_1$  to be real we get the solution

$$w = K \left[ 2(\bar{\lambda}z + \lambda\bar{z}) \log \varrho + \frac{c(1 - \varrho^2)}{|1 + \lambda_1\zeta|^2} (2\lambda_1 \cos \alpha + \bar{\lambda}\zeta + \lambda\bar{\zeta}) \right] \dots (82),$$

which corresponds to a couple nucleus at any point of a clamped circular plate. In the particular case of PASCAL's limaçon (71b), the solution (81) can be expressed in terms of the curvilinear coordinates  $(u, v)$ . Remembering that  $\lambda_1 = 2\lambda_2^{1/2}$  and using (70) and (71c) we arrive at

$$w = \frac{8Kq}{(\cosh v + \cos u)^2} [(\beta - v) \{ \cos \alpha (1 + \cos u \cosh v) + \sin \alpha \sin u \sinh v \} \\ + \sinh(v - \beta) \{ \cos \alpha \operatorname{sech} 2\beta \cosh(v + \beta) + \cos \alpha \cosh \beta \cos u + \sin \alpha \sinh \beta \sin u \}] \quad (83).$$

It is easily verified that the solutions (72) and (83) satisfy the boundary conditions  $w = 0$  and  $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$  on  $v = \beta$ .

### 10. Solutions for Clamped and Singularly Loaded Plates Bounded by the Inverses of a General Family of Ovaloids

In section 4 we have seen that the inverses  $\Gamma'_2$  of the family of curves  $\Gamma_2$  mapped on  $\gamma$  by (26) represent certain ovaloids which are symmetrical with respect to the coordinate axes. See Fig. 3. In this section we consider clamped plates bounded by  $\Gamma_2$  and transversely loaded by (a) an isolated load  $P_0$  applied at any point  $z_0(\zeta_0)$ , (b) a couple nucleus  $M$  operating at the centre.

Case (a). In this case we assume that the complex potentials are given by (59a). The regular functions  $F(\zeta)$  and  $f(\zeta)$  will be tentatively sought in the forms

$$F(\zeta) = c \left[ A + \frac{\sum_{n=0}^3 A_n \zeta^n}{1 + \lambda_1 \zeta^2 + \lambda_2 \zeta^4} \right], \quad f(\zeta) = c^2 \left[ B + \frac{\sum_{n=0}^3 B_n \zeta^n}{1 + \lambda_1 \zeta^2 + \lambda_2 \zeta^4} \right] \dots (84),$$

where the complex constants  $A$ ,  $A_n$ ,  $B$ ,  $B_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) are to be determined from (60). The constants  $A_1$ ,  $B$  may be taken as real and  $B_1$  may be taken as zero. Substitution from (84) and (26) in (60) gives the two identities

$$\sum_{n=0}^3 [A_n \sigma^{n-1} + \bar{A}_n \sigma^{-n+1} + (1 + \lambda_1 \sigma^2 + \lambda_2 \sigma^4) \bar{B}_n \sigma^{-n} + (1 + \lambda_1 \sigma^{-2} + \lambda_2 \sigma^{-4}) B_n \sigma^n] \\ + A(\sigma^{-1} + \lambda_1 \sigma + \lambda_2 \sigma^3) + \bar{A}(\sigma + A_1 \sigma^{-1} + \lambda_2 \sigma^{-3}) + 2(1 + \lambda_1 \sigma^2 + \lambda_2 \sigma^4)(1 + \lambda_1 \sigma^{-2} + \lambda_2 \sigma^{-4}) B \equiv 0 \quad (85a),$$

$$\sum_{n=0}^3 [\sigma(1 - \lambda_1 \sigma^2 - 3\lambda_2 \sigma^4) \bar{A}_{3-n} + \{n\sigma^{-1} + (n-2)\lambda_1 \sigma + (n-4)\lambda_2 \sigma^3\} \{\sigma^3 A_n + (\sigma^4 + \lambda_1 \sigma^2 + \lambda_2) B_n\}] \sigma^n \\ + (1 - \lambda_1 \sigma^2 - 3\lambda_2 \sigma^4)(\sigma^4 + \lambda_1 \sigma^2 + \lambda_2) \bar{A} - \sigma^3(1 + \lambda_1 \sigma^2 + \lambda_2 \sigma^4) \left[ C_0 + \sum_{n=1}^3 (C_n \sigma^n + \bar{C}_n \sigma^{-n}) \right] \equiv 0 \quad (85b),$$

where

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \mu [1 + \lambda_1^2 \varrho_0^2 + \lambda_2^2 \varrho_0^2 (1 + \varrho_0^2 + \varrho_0^4) + \lambda_1 \lambda_2 \varrho_0^2 (\zeta_0^2 + \bar{\zeta}_0^2)], \\ C_1 &= \mu [\zeta_0 (\lambda_1 \lambda_2 \varrho_0^3 - \lambda_2 \zeta_0^2 - \lambda_1) + \lambda_2^2 \varrho_0^2 (1 + \varrho_0^2) \bar{\zeta}_0], \\ C_2 &= \mu \lambda_2 (\lambda_1 \varrho_0^2 + \lambda_2 \varrho_0^2 \zeta_0^2 - \zeta_0^2), \quad C_3 = -\mu \lambda_2 \zeta_0, \\ \mu &= \frac{1 - \varrho_0^2}{|1 + \lambda_1 \zeta_0^2 + \lambda_2 \bar{\zeta}_0^4|^2} \end{aligned} \right\} \dots (85c).$$

Equating the coefficients of powers of  $\sigma$  in these identities to zero we get a simultaneous system of 16 linear equations which are satisfied by

$$\left. \begin{aligned} A &= \lambda_2^{-1} C_3, \\ A_0 &= -[\bar{C}_1 + \lambda_1 \bar{C}_3 + (2\lambda_2 + \lambda_2^{-1}) C_3], \\ A_1 &= J \left[ \frac{1}{2} (1 + \lambda_2) \{ (1 - \lambda_2)^2 - \lambda_1^2 \} C_0 + \lambda_1 (1 + \lambda_2^2) (C_2 + \bar{C}_2) \right], \\ A_2 &= C_1 + \lambda_1 (2 - \lambda_2^{-1}) + 3\lambda_2 \bar{C}_3, \\ A_3 &= J \left[ \lambda_1^2 (1 - \lambda_2) C_2 - 2\lambda_1 \lambda_2 C_0 + \frac{1 + 3\lambda_2^2}{1 + \lambda_2} \{ (1 + \lambda_2^2) C_2 + 2\lambda_2 \bar{C}_2 \} \right], \\ B &= \frac{1}{2} J [(1 - \lambda_2) C_0 + \lambda_1 (C_2 + \bar{C}_2)], \\ B_0 &= -J [(1 - \lambda_2) C_0 + \lambda_1 (C_2 + \bar{C}_2)], \quad B_1 = 0, \\ B_2 &= -J \left[ \lambda_1 (\lambda_1 C_2 - \lambda_2 C_0) + \frac{1 + 3\lambda_2^2}{1 + \lambda_2} (C_2 + \lambda_2 \bar{C}_2) \right], \quad B_3 = -C_3, \\ J^{-1} &= (1 - \lambda_2) (1 + 3\lambda_2^2) + \lambda_1^2 (1 + \lambda_2), \quad \lambda_2 \neq 0, -1 \end{aligned} \right\} \dots (86).$$

When the values given by (86) and (85c) are introduced in (84) and the results inserted in (59b) it is found, after a considerable amount of algebraic manipulation, that the final expression for the deflexion may be put in the symmetrical form

$$\begin{aligned} w(\zeta, \zeta_0) &= w(\zeta_0, \zeta) = 2k |z - z_0|^2 \log \left| \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta}{\zeta - \bar{\zeta}_0} \right| \\ &\quad - \frac{2k c^2 (1 - \varrho_0^2) (1 - \varrho^2)}{|1 + \lambda_1 \zeta_0^2 + \lambda_2 \bar{\zeta}_0^4|^2 |1 + \lambda_1 \zeta^2 + \lambda_2 \bar{\zeta}^4|^2} \Re \left[ \lambda_1 \zeta_0 \zeta \{ \lambda_2 (\varrho^2 + \varrho_0^2 - 1) - 1 \} \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2^2 \bar{\zeta}_0 \zeta (\varrho^4 + \varrho_0^4 + \varrho^2 + \varrho_0^2 - 2) - \lambda_2 \zeta_0 \zeta (\zeta_0^2 + \bar{\zeta}_0^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{S(\varrho, \varrho_0) + T(\varrho, \varrho_0) \zeta_0^2 + T(\varrho_0, \varrho) \zeta^2 + U(\varrho, \varrho_0) \zeta_0^2 \zeta^2 + V(\varrho, \varrho_0) \bar{\zeta}_0^2 \bar{\zeta}^2}{(1 - \lambda_2) (1 + 3\lambda_2^2) + \lambda_1^2 (1 + \lambda_2)} \right] \dots (87), \end{aligned}$$

where

$$\left. \begin{aligned} S(\varrho, \varrho_0) &= \frac{1}{2} (1 - \lambda_2) \{ 1 + \lambda_1^2 \varrho_0^2 + \lambda_2^2 \varrho_0^2 (1 + \varrho_0^2 + \varrho_0^4) \} \{ 1 + \lambda_1^2 \varrho^2 + \lambda_2^2 \varrho^2 (1 + \varrho^2 + \varrho^4) \} \\ &\quad + \lambda_1^2 \lambda_2 [\varrho^2 + \varrho_0^2 + \varrho_0^2 \varrho^2 \{ \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - 1 + \lambda_2^2 (\varrho^4 + \varrho_0^4 + \varrho^2 + \varrho_0^2 - 2) \}], \\ T(\varrho, \varrho_0) &= \lambda_1 \lambda_2 [\lambda_1^2 (1 + \lambda_2) \varrho_0^2 \varrho^2 + (1 + 3\lambda_2^2) (1 - \lambda_2 \varrho_0^2) \varrho^2 - (1 - \varrho_0^2) \{ 1 + \lambda_2^2 \varrho^2 (1 + \varrho^2 + \varrho^4) \}], \\ U(\varrho, \varrho_0) &= \lambda_2 \left[ \lambda_2 \left( \frac{\lambda_2 + 3\lambda_2^2}{1 + \lambda_2} - \lambda_1^2 \right) (\varrho^2 + \varrho_0^2 - \varrho_0^2 \varrho^2) - \frac{1 + 3\lambda_2^2}{1 + \lambda_2} - \lambda_1^2 \right], \\ V(\varrho, \varrho_0) &= \lambda_2^2 \left[ \frac{1 + 3\lambda_2^2}{1 + \lambda_2} (\varrho^2 + \varrho_0^2 - \lambda_2^2 \varrho_0^2 \varrho^2 - 1) + \lambda_1^2 (1 + \lambda_2) \varrho_0^2 \varrho^2 \right] \quad (\lambda_2 \neq -1) \end{aligned} \right\} \dots (88).$$

In the special cases  $\lambda_1 = 0$  and  $\lambda_2 = 0$  the deflexion (87) reduces to eqns (3.39) and (4.7) of [5].

Case (b). When the plate mapped on the unit circle by (26) is clamped and subjected to the couple nucleus  $M$  at the centre the appropriate forms for the potentials and deflexion are furnished by (61), where the regular functions  $F(\zeta)$  and  $f(\zeta)$  will be tentatively taken as

$$F(\zeta) = A + \frac{A_0 + A_1 \zeta^2}{1 + \lambda_1 \zeta^2 + \lambda_2 \bar{\zeta}^4}, \quad f(\zeta) = \frac{C B \zeta^3}{1 + \lambda_1 \zeta^2 + \lambda_2 \bar{\zeta}^4} \dots (89);$$

the complex constants  $A$ ,  $A_0$ ,  $A_1$  and  $B$  are to be found by using (63). Inserting (26) and (89) in (63) we see that the obtained identities are satisfied by

$$\left. \begin{aligned} A &= -\lambda, & A_0 &= 2(1 + \lambda_2^2)\lambda + \lambda_1(1 + \lambda_2)\bar{\lambda}, \\ A_1 &= -2\lambda_1\lambda_2\lambda - (1 + 3\lambda_2^2)\bar{\lambda}, & B &= \lambda\lambda_2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (90).$$

From (89), (90) and (61b) the deflexion  $w$  is found as

$$w = 2K \left[ (\bar{\lambda}z + \lambda\bar{z}) \log \varrho + \frac{c(1 - \varrho^2)}{|1 + \lambda_1\zeta^2 + \lambda_2\zeta^4|^2} \Re \zeta \{ \lambda\lambda_1(1 + \lambda_2 - \lambda_2\varrho^2) + \bar{\lambda}(1 + 2\lambda_2^2 - \lambda_2^2\varrho^2 - \lambda_2\varrho^4) + \lambda\lambda_2\zeta^2 \} \right] \quad (\lambda = e^{i\alpha}) \quad \dots \dots \dots (91),$$

which agrees, as it should with eqns (6.6) and (6.9) of [5] in the two particular cases  $\lambda_1 = 0$  and  $\lambda_2 = 0$ , respectively.

### References

- [1] W. A. BASSALI, and R. H. DAWOUD, Proc. Camb. Phil. Soc. **52** (1956), S. 584.
- [2] W. A. BASSALI, Proc. Camb. Phil. Soc. **53** (1957), S. 248.
- [3] W. A. BASSALI, and R. H. DAWOUD, Proc. Camb. Phil. Soc. **53** (1957), S. 755.
- [4] W. A. BASSALI, Bull. Faculty of Science, Alexandria **2** (1958), S. 3.
- [5] W. A. BASSALI, Proc. Camb. Phil. Soc. **55** (1959), S. 121.
- [6] W. A. BASSALI, J. Mech. Phys. Solids **7** (1959), S. 145.
- [7] S. C. DAS, Bull. Calcutta Math. Soc. **42** (1950), S. 89.
- [8] W. R. DEAN, Proc. Camb. Phil. Soc. **49** (1953), S. 319.
- [9] L. I. DEVERALL, J. Appl. Mech. **24** (1957), S. 295.
- [10] C. A. M. GRAY, J. Appl. Mech. **19** (1952), S. 422.
- [11] H. SCHMIDT, Ing.-Arch. **1** (1930), S. 147.
- [12] B. SEN, Phil. Mag. (7), **33** (1942), S. 294.
- [13] H. M. SENGUPTA, Bull. Calcutta Math. Soc. **41** (1949), S. 163.
- [14] A. C. STEVENSON, Phil. Mag. (7), **34** (1943), S. 105.
- [15] R. TIFFEN, Quart. J. Mech. Appl. Math. **8** (1955), S. 237.
- [16] S. WOJNOWSKY-KRIEGER, J. Appl. Mech. **20** (1953), S. 77.
- [17] S. WOJNOWSKY-KRIEGER, Ing.-Arch. **21** (1953), S. 331.
- [18] Y. Y. YU, Proc. 9th Internat. Congr. Appl. Mech. Brussels (1956), S. 378.

Manuskripteingang: 7. 2. 60

*Anschrift:* Dr. W. A. BASSALI, Prof. of Appl. Math., Faculty of Science, University of Alexandria, Alexandria (Egypt)

## KLEINE MITTEILUNGEN

### Zur Berechnung rotationssymmetrischer Düsenströmungen

Bei der Berechnung stationärer und wirbelfreier Gasströmungen hat man verschiedentlich ein Anfangswertproblem zu lösen, das für eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung gestellt wird. Handelt es sich im besonderen um rotationssymmetrische Strömungen, so sind die Anfangswerte mitunter auf der Rotationsachse vorgeschrieben. Wegen der Singularität, welche die Differentialgleichung dort aufweist, wird dann die Lösbarkeit des Anfangswertproblems nicht durch den CAUCHY-KOWALEWSKISCHEN Existenzsatz gesichert. Jedoch führt die in der Praxis übliche numerische Berechnung einiger Reihenglieder zu befriedigenden Resultaten.

Im folgenden wird die Konvergenz dieser Potenzreihen bewiesen. Die zu einer bestimmten rotations-symmetrischen Strömung gehörige Reihe kann man nämlich immer durch eine Reihe majorisieren, die sich bei der Lösung eines analogen ebenen Strömungsproblems ergibt.

Genauer handelt es sich um den Beweis des folgenden Satzes, sowie um zwei Anwendungen desselben, die mit der numerischen Berechnung von Überschall-düsen zusammenhängen.

**Satz 1.** Es gibt genau eine reguläre analytische Lösung  $\varphi(x, y)$  der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} (\varphi_x^2 - a^2)\varphi_{xx} + 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (\varphi_y^2 - a^2)\varphi_{yy} \\ - \sigma a^2 \frac{\varphi_y}{y} = 0 \quad \dots \dots \dots (1), \end{aligned}$$

die der Anfangsbedingung

$$\varphi(x, 0) = \psi(x), \quad \varphi_y(x, 0) = 0 \quad \dots \dots (2)$$

für alle  $x$  einer Umgebung der Stelle  $x_0$  genügt, wenn die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

a) Mit einer Konstanten  $\kappa > 1$  ist

$$a^2 = \frac{\kappa - 1}{2} (1 - \varphi_x^2 - \varphi_y^2) \quad \dots \dots (3).$$

b) Die Funktion  $\psi(x)$  ist an der Stelle  $x_0$  regulär, und es gilt

$$|\psi'(x_0)| < 1.$$

c) Die Konstante  $\sigma$  ist nicht negativ.

Die oben genannten Gasströmungen lassen sich durch Gleichung (1) beschreiben.  $\varphi(x, y)$  stellt dabei das Strömungspotential dar und  $\kappa$  das Verhältnis der spezifischen Wärmen des Gases. Die Beziehung (3) gilt, mit  $a$  als lokaler Schallgeschwindigkeit, bei



geeigneter Normierung der Geschwindigkeiten. Dieser Normierung entsprechend beschreiben sodann die Ungleichungen

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} < \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} < 1$$

den Überschallbereich der Strömung. Für ebene Strömungen ist  $\sigma = 0$ , für rotationssymmetrische  $\sigma = 1$  zu setzen;  $x, y$  sind als kartesische bzw. als Zylinderkoordinaten in der Strömungsebene zu deuten, wobei im letzteren Fall längs der Zylinderachse  $y = 0$  ist.

### 1. Schalldurchgang in Lavaldüsen

Die Gleichung (1) dient in der Gasdynamik unter anderem zur Berechnung der Strömung in LAVAL-DÜSEN. Im transsonischen Bereich arbeitet man mit Potenzreihen

$$\varphi(x, y) = \sum_{m,n} c_{mn} x^m y^n \dots (4),$$

deren Entwicklungspunkt den Mittelpunkt der Schalldurchgangskurve bezeichnet. Der Potenzreihenansatz (4) wird durch Satz 1 gerechtfertigt, wenn nur die Strömungsgeschwindigkeit  $\psi'(x)$ , die längs der Symmetrieachse  $y = 0$  vorgeschrieben wird, eine reguläre Funktion von  $x$  ist.

Zum praktisch wichtigsten Sonderfall kommt man, wenn man ein lineares Ansteigen der Geschwindigkeit längs der Symmetrieachse fordert, also

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} x + \lambda x^2 \quad (\lambda > 0)$$

wählt. Hierfür haben MARTENSEN und v. SENGBUSCH die Koeffizienten  $c_{mn}$  bis zur Ordnung 23 numerisch berechnet. Alle diese Koeffizienten sind positiv oder null. Außerdem sind sie kleiner als die entsprechenden Koeffizienten jener Reihe, welche das analoge ebene Strömungsproblem löst. Diese Aussagen über die ersten Koeffizienten der beiden Reihen sind aber für alle Koeffizienten dieser Reihen richtig, wie der Beweis des später formulierten Satzes 2 zeigen wird. Deshalb gilt jede Abschätzung des Konvergenzgebietes der Reihe (4), die bei konstantem Geschwindigkeitszuwachs auf der Achse für die ebene Strömung besteht, erst recht für die entsprechende rotations-symmetrische Strömung. Eine solche Abschätzung für den Fall der ebenen Strömung findet man in der unter [5] zitierten Arbeit.

### 2. Die Berechnung knickfreier Überschalldüsen

Um die Gestalt einer Überschalldüse zu berechnen, bestimmt man gewöhnlich zuerst die Strömung im transsonischen Bereich und ermittelt daraus die zugehörige Form der Düsenkehle. Sodann entsteht die Aufgabe, die Kontur der Düse stromabwärts so zu verlängern, daß im Endquerschnitt der Düse eine Parallelströmung entsteht. Dabei ist es wichtig, Düsenkehle und Überschallteil möglichst knickfrei aneinander zu passen. Man fordert etwa noch die Stetigkeit der zweiten Ableitung der Düsenkontur.

Neben der grundsätzlichen Frage, wie man eine hinreichend glatte Düsenkontur erhält, entsteht für rotationssymmetrische Düsen noch eine weitere Schwierigkeit: Die zur Integration der Differentialgleichung gebräuchlichen Charakteristikenverfahren führen nämlich bei der Berechnung achsennaher Gitterpunkte zu erheblichen Genauigkeitsverlusten. Der Verwendung nichtlinearer Differenzengleichungen steht auf der Achse zudem entgegen, daß das sonst zu deren Auflösung übliche Iterationsverfahren hier schon in ganz einfachen Fällen nicht konvergiert. Überdies ist wegen des singulären Verhaltens der Differentialgleichung auf der Achse offen, ob die durch ein Differenzenverfahren bestimmten Näherungen tatsächlich gegen eine Lösung der Differentialgleichung konvergieren; ja selbst die Existenz solcher Lösungen ist nicht gesichert, falls man auf die Regularität der Anfangswerte  $\psi(x)$  verzichtet.

Man kann jedoch eine knickfreie Düsenkontur ohne alle Kunstgriffe berechnen, indem man die Strömungsgeschwindigkeit längs der ganzen Achse geeignet beschreibt. Wählt man für  $\psi(x)$  eine analytische Funktion, so wird nach Satz 1 auch der Verlauf der Düsenkontur durch eine analytische Funktion beschrieben. Eine Parallelströmung im Endquerschnitt der Düse entsteht, wenn  $\psi'(x)$  von einer gewissen Stelle an durch eine Konstante approximiert wird.

Zur numerischen Berechnung der Überschallströmung kann man ohne weiteres ein Charakteristikenverfahren verwenden, nachdem man die Strömung in Achsennähe mit der Reihe (4) bestimmt hat. Die numerische Durchführung von Beispielen läßt erwarten, daß man zumeist mit einem Reihenabschnitt auskommen wird, der bezüglich  $y$  die quadratischen Glieder, allenfalls aber die Glieder 4. Ordnung enthält.

### 3. Berechnung der Reihenglieder

Wir wollen eine Rekursionsformel aufstellen, mit der sich die Glieder der Reihe (4) berechnen lassen. Dazu betrachten wir eine vorerst beliebige Funktion

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) y^n \dots (5),$$

die in einer Umgebung der Stelle  $x = x_0, y = 0$  regulär ist. Offenbar genügt eine solche Funktion der Anfangsbedingung (2) genau dann, wenn

$$\varphi_0(x) = \psi(x), \quad \varphi_1(x) = 0 \dots (6)$$

ist.

Mit Hilfe der Polynome

$$\left. \begin{aligned} A_n &= A_n(\varphi'_0, \dots, \varphi'_n) = \sum_{h=0}^n \varphi'_h \varphi'_{n-h}, \\ B_n &= B_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}) \\ &= \sum_{h=0}^n (h+1)(n-h+1) \varphi_{h+1} \varphi_{n-h+1}, \\ C_n &= C_n(\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}; \varphi'_0, \dots, \varphi'_n) \\ &= \sum_{h=0}^n (n-h+1) \varphi'_h \varphi_{n-h+1}, \\ &(n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ergeben sich die Entwicklungen

$$\begin{aligned} \varphi_x &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi'_n y^n, & \varphi_y &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \varphi_{n+1} y^n, \\ \varphi_x^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} A_n y^n, & \varphi_y^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n y^n, \\ \varphi_{xx} &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi''_n y^n, & \varphi_{yy} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \varphi_{n+2} y^n, \\ \varphi_x \varphi_y &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n y^n, & \varphi_{xy} &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \varphi'_{n+1} y^n. \end{aligned}$$

Diese Formeln liefern nun zusammen mit der Forderung  $\varphi_1 = 0$  die folgende Entwicklung für die linke Seite unserer Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} &\{\varphi_x^2 - a^2\} \varphi_{xx} + 2 \varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + \{\varphi_y^2 - a^2\} \varphi_{yy} - \sigma a^2 \frac{\varphi_y}{y} \\ &= \left\{ -\frac{x-1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ A_n + \frac{x-1}{2} (A_n + B_n) \right] y^n \right\} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \varphi''_n y^n + 2 \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} C_n y^n \right\} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \varphi'_{n+1} y^n \\ &\quad + \left\{ -\frac{x-1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[ B_n + \frac{x-1}{2} (A_n + B_n) \right] y^n \right\} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) \varphi_{n+2} y^n \\ &\quad + \sigma \left\{ -\frac{x-1}{2} + \frac{x-1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (A_n + B_n) y^n \right\} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \varphi_{n+2} y^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} y^n \left[ \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( \frac{\kappa+1}{2} A_{n-i} + \frac{\kappa-1}{2} B_{n-i} \right) \varphi_i' \right. \right. \\
&\quad + 2(i+1) C_{n-i} \varphi_{i+1}' + (i+2)(i+1) B_{n-i} \varphi_{i+2}' \\
&\quad + (i+1+\sigma)(i+2) \frac{\kappa-1}{2} (A_{n-i} + B_{n-i}) \varphi_{i+2}' \Big\} \\
&\quad + \frac{\kappa+1}{2} \left( \varphi_0'^2 - \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \right) \varphi_n'' \\
&\quad \left. - (n+1+\sigma)(n+2) \frac{\kappa-1}{2} (1 - \varphi_0'^2) \varphi_{n+2}' \right].
\end{aligned}$$

Die gesuchten Lösungen der Differentialgleichung müssen also notwendig der folgenden Rekursionsformel für  $n = 0, 1, 2, \dots$  genügen:

$$\begin{aligned}
(n+1+\sigma)(n+2)(1 - \varphi_0'^2) \varphi_{n+2}' &= \left( \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \varphi_0'^2 - 1 \right) \varphi_n'' \\
&+ \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \left( \frac{\kappa+1}{\kappa-1} A_{n-i} + B_{n-i} \right) \varphi_i'' \right. \\
&+ \frac{4}{\kappa-1} (i+1) C_{n-i} \varphi_{i+1}' \\
&+ \frac{2}{\kappa-1} (i+2)(i+1) B_{n-i} \varphi_{i+2}' \\
&\left. + (i+1+\sigma)(i+2)(A_{n-i} + B_{n-i}) \varphi_{i+2}' \right\} \dots (8).
\end{aligned}$$

Man erkennt, daß hier die rechte Seite ganzrational von den Funktionen  $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n+1}$  und deren Ableitungen erster und zweiter Ordnung abhängt. Außerdem wird nach Voraussetzung b) von Satz 1

$$1 - \psi_0'^2 = 1 - \varphi_0'^2$$

in einer gewissen Umgebung  $\mathfrak{U}$  der Stelle  $x_0$  nicht verschwinden. Deshalb bestimmen die Gleichungen (6), (7) und (8) eindeutig die Funktionen  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$ . Diese so definierten Funktionen sind alle in der Umgebung  $\mathfrak{U}$  regulär. Mit der Konvergenz der sich daraus ergebenden Reihe (5) wird auch Satz 1 bewiesen sein.

#### 4. Konvergenzbeweis

Die Konvergenz der Reihe (5) kann mit der Majorantenmethode von CAUCHY bewiesen werden. Denn es gilt der folgende

**Satz 2.** Die Konstanten  $\kappa, \sigma > 0$  und die Funktion

$$\psi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m$$

mögen den Voraussetzungen von Satz 1 genügen, und es sei dazu die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{mn} (x - x_0)^m y^n$$

auf Grund der Gleichungen (6), (7) und (8) bestimmt. Ebenso möge den Konstanten  $\bar{\kappa}, \sigma = 0$  und der Funktion

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{a}_m (x - x_0)^m$$

die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\varphi}_n(x) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{c}_{mn} (x - x_0)^m y^n$$

entsprechen.

Falls dann die Ungleichungen

$$\kappa \geq \bar{\kappa}, \quad |a_m| \leq \bar{a}_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\left| \frac{\kappa+1}{\kappa-1} a_1^2 - 1 \right| \leq \left| \frac{\bar{\kappa}+1}{\bar{\kappa}-1} \bar{a}_1^2 - 1 \right|$$

bestehen, gilt für alle Indizes  $m$  und  $n$

$$|c_{mn}| \leq \bar{c}_{mn}.$$

**Bemerkung 1.** Wenn  $\sigma, \kappa$  und  $\psi(x)$  den Voraussetzungen von Satz 1 entsprechend vorgegeben sind, so kann man dazu immer eine Konstante  $\bar{\kappa}$  und eine Funktion  $\bar{\psi}(x)$  so bestimmen, daß alle Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt sind: Zum Beispiel genügt es immer, wenn man

$$\bar{a}_m = \begin{cases} |a_m| & \text{für } m \neq 1 \\ \frac{1}{2} (|a_1| + 1) & \text{für } m = 1 \end{cases}$$

setzt und  $\bar{\kappa}$  im Intervall  $1 < \bar{\kappa} \leq \kappa$  genügend nahe bei 1 wählt. Wenn insbesondere

$$a_1^2 \geq \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$$

ist, so genügt es auch, wenn man definiert:

$$\bar{a}_m = |a_m| \quad (m = 0, 1, \dots), \quad \bar{\kappa} = \kappa.$$

**Bemerkung 2.** Wählt man  $\sigma = 0$ , so löst der CAUCHY-KOWALEWSKISCHE Existenzsatz unser Anfangswertproblem. In einer Umgebung der Stelle  $x = x_0, y = 0$  konvergiert deshalb jede nach Satz 2 gebildete Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \bar{\varphi}_n(x) y^n$ .

Wenn also  $\kappa, \sigma$  und  $\psi(x)$  im Rahmen von Satz 1 gewählt werden, so sichert Satz 2 die Existenz einer konvergenten Majorante der Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) y^n$ . Es

fehlt daher nur noch der Beweis von Satz 2.

Aus (6) folgt  $c_{m1} = 0$  bzw.  $\bar{c}_{m1} = 0$ , und wegen  $|a_m| \leq \bar{a}_m$  auch  $|c_{m0}| \leq \bar{c}_{m0}$ . Mindestens für  $n = 0$  gelten deshalb die Ungleichungen

$$\left. \begin{aligned} |c_{m0}| &\leq \bar{c}_{m0}, \\ |c_{mi}| &\leq \frac{i-1}{i-1+\sigma} \bar{c}_{mi}, \end{aligned} \right\} \quad (9) \quad (m = 0, 1, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, n+1)$$

Ein Induktionsschluß nach  $n$  wird die allgemeine Gültigkeit dieser Ungleichungen und damit erst recht Satz 2 erweisen.

Wir wollen beide Seiten der Rekursionsformel (8) durch  $1 - \varphi_0'^2$  dividieren und sodann nach Potenzen von  $(x - x_0)$  entwickeln. Hierbei verwenden wir die Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} Q &= \sum_{m=0}^{\infty} q_m (x - x_0)^m = \frac{1}{1 - \varphi_0'^2}, \\ R_n &= \sum_{m=0}^{\infty} r_{mn} (x - x_0)^m \\ &= (\varphi_0'^2 - c_{10}^2) \varphi_n'' + \sum_{i=0}^{n-1} A_{n-i} \varphi_i'', \\ S_n &= \sum_{m=0}^{\infty} s_{mn} (x - x_0)^m = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-i} \varphi_i'', \\ T_n &= \sum_{m=0}^{\infty} t_{mn} (x - x_0)^m \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \{ 2(i+1) C_{n-i} \varphi_{i+1}' \\ &\quad + (i+2)(i+1) B_{n-i} \varphi_{i+2}' \}, \\ U_{ni} &= \sum_{m=0}^{\infty} u_{mni} (x - x_0)^m \\ &= (i+2)(A_{n-i} + B_{n-i}) \varphi_{i+2}', \\ &\quad (i = 0, 1, \dots, n-1; \quad n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \quad (10).$$

Man findet

$$\begin{aligned}
(n+1+\sigma)(n+2) \varphi_{n+2}' &= Q \left[ \frac{\kappa+1}{\kappa-1} R_n + \left( \frac{\kappa+1}{\kappa-1} c_{10}^2 - 1 \right) \varphi_n'' + S_n \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\kappa-1} T_n + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1+\sigma) U_{ni} \right],
\end{aligned}$$



und hieraus durch Vergleich der Koeffizienten von  $(x - x_0)^m$

$$(n+1+\sigma)(n+2)c_{m,n+2} = \sum_{j=0}^m q_{m-j} \left[ \frac{\kappa+1}{\kappa-1} r_{jn} + \left( \frac{\kappa+1}{\kappa-1} c_{10}^2 - 1 \right) (j+2)(j+1)c_{j+2,n} + s_{jn} + \frac{2}{\kappa-1} t_{jn} + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1+\sigma) u_{jni} \right] \dots (11).$$

Wenn man sich jetzt  $A_n$ ,  $B_n$  und  $C_n$  nach Potenzen von  $(x - x_0)$  entwickelt denkt, so sieht man an Hand der Gleichungen (7), daß die Reihenkoeffizienten Polynome in den  $c_{k0}$ ,  $c_{k1}$ , ...,  $c_{k,n+1}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) sind. Jedes dieser Polynome hat als Koeffizienten nicht negative ganze Zahlen, die von  $\kappa$  und  $\sigma$  unabhängig sind. In der gleichen Weise hängen auch die Größen  $r_{mn}$ ,  $s_{mn}$ ,  $t_{mn}$ ,  $u_{mni}$  von den  $c_{k0}$ ,  $c_{k1}$ , ...,  $c_{k,n+1}$  ab. Das folgt wegen

$$\varphi_0^2 - c_{10}^2 = 4 c_{10} c_{20} (x - x_0) + \dots$$

aus den Gleichungen (10). Wir schreiben

$$r_{mn} = r_{mn}(c_{k0}, \dots, c_{k,n+1}), \\ \bar{r}_{mn} = \bar{r}_{mn}(\bar{c}_{k0}, \dots, \bar{c}_{k,n+1}) \text{ etc.}$$

und gewinnen aus der Induktionsannahme (9) die Abschätzung

$$|r_{mn}| \leq r_{mn}(|c_{k0}|, \dots, |c_{k,n+1}|) \leq \bar{r}_{mn}.$$

Ebenso gilt  $|s_{mn}| \leq \bar{s}_{mn}$ ,  $|t_{mn}| \leq \bar{t}_{mn}$ . Die Größen  $u_{mni}$  enthalten keine von allen  $c_{0,i+2}$ ,  $c_{1,i+2}$ , ... freien Glieder und gestatten deshalb sogar die Abschätzung

$$|u_{mni}| \leq \frac{i+1}{i+1+\sigma} \bar{u}_{mni}.$$

Wegen  $|\varphi'_0(x_0)| = |\psi'(x_0)| < 1$  ist die Darstellung

$$Q = \sum_{m=0}^{\infty} q_m (x - x_0)^m = 1 + \varphi_0'^2 + \varphi_0'^4 + \dots$$

zulässig. Also ist auch  $|q_m| \leq \bar{q}_m$ .

Auf Grund der Voraussetzungen von Satz 2 wird schließlich auch

$$\left| \frac{\kappa+1}{\kappa-1} c_{10}^2 - 1 \right| \leq \frac{\bar{\kappa}+1}{\bar{\kappa}-1} \bar{c}_{10}^2 - 1, \\ 0 < \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \leq \frac{\bar{\kappa}+1}{\bar{\kappa}-1}, \quad 0 < \frac{2}{\kappa-1} \leq \frac{2}{\bar{\kappa}-1},$$

und mit allen diesen Abschätzungen liefert endlich die Rekursionsformel (11)

$$|(n+1+\sigma)(n+2)c_{m,n+2}| \\ \leq \sum_{j=0}^m \bar{q}_{m-j} \left[ \frac{\bar{\kappa}+1}{\bar{\kappa}-1} \bar{r}_{jn} + \left( \frac{\bar{\kappa}+1}{\bar{\kappa}-1} \bar{c}_{10}^2 - 1 \right) \right. \\ \times (j+2)(j+1) \bar{c}_{j+2,n} + \bar{s}_{jn} + \frac{2}{\bar{\kappa}-1} \bar{t}_{jn} \\ \left. + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) \bar{u}_{jni} \right] \\ = (n+1)(n+2) \bar{c}_{m,n+2}, \\ |c_{m,n+2}| \leq \frac{n+1}{n+1+\sigma} \bar{c}_{m,n+2}.$$

Hiermit sind die Ungleichungen (9) durch vollständige Induktion bewiesen.

#### Literatur

- [1] R. SAUER, General characteristics of the flow through nozzles at near critical speeds, NACA techn. Memo. No. 1147 (1947).
- [2] R. SAUER, Einführung in die Gasdynamik, Berlin 1961, Springer-Verlag.
- [3] H. LIPPS, Genauigkeitsuntersuchungen für die Näherungsverfahren zur Berechnung von drehunsymmetrischen Düsenströmungen, insbesondere auch in Achsennähe, Mitt. Nr. DFG 9 des Math. Inst. der T.H. München (1955).

- [4] E. MARTENSEN und K. v. SENGBUSCH, Numerische Darstellung von ebenen und rotationssymmetrischen transsonischen Düsenströmungen mit gekrümmtem Schalldurchgang, Mitt. Nr. 19 des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt, Göttingen (1958).
- [5] E. MARTENSEN, Abschätzung des Regularitätsgebietes und numerische Darstellung transsonischer Düsenströmungen, ZAMM 38 (1958).

Verfasser: Dr. HERBERT LIPPS, 1 rue Hoffmann, Genève, Schweiz

#### Eine Vereinfachung des v. Kármán-Pohlhausen-Verfahrens für Grenzschriften an Rotationskörpern

Zur näherungsweisen Lösung der PRANDTL'schen Grenzschrift-Differentialgleichungen geht man beim v. KÁRMÁN-POHLHAUSEN-Verfahren vom Impulsatz aus. Dieser lautet für die zweidimensionale stationäre laminare Wand-Grenzschicht eines inkompressiblen Mediums der Dichte  $\rho$  und der kinematischen Zähigkeit  $\nu$  (vgl. etwa H. SCHLICHTING<sup>1)</sup>, Formel (12, 18), S. 224)

$$U^2 \vartheta' + (2\vartheta + \delta^*) U U' = \frac{\tau_0}{\rho} \dots (1).$$

Darin ist  $U(x)$  die Außengeschwindigkeit,  $\vartheta(x)$  und  $\delta^*(x)$  bedeuten die Impulsverlustdicke und die Verdrängungsdicke, während  $\tau_0(x)$  die Wandschubspannung darstellt. Die unabhängige Veränderliche  $x$  ist die Bogenlänge längs des angeströmten Körpers, Striche bedeuten Ableitungen nach  $x$ .

In der HOLSTEIN-BOHLENSchen Modifikation des o. e. Verfahrens (vgl. <sup>1)</sup>, S. 224 ff) wird nun angenommen, daß

$$\kappa = \frac{\vartheta^2}{\nu} U'$$

ein „Formparameter“ ist derart, daß  $\vartheta = \vartheta(\kappa)$ ,  $\delta^* = \delta^*(\kappa)$  und  $\frac{\tau_0}{\rho} = f_1(\kappa)$  gilt. Setzt man dann noch

$$Z = \frac{\vartheta^2}{\nu},$$

so ergibt sich mit

$$F(\kappa) = 2f_2 - 4\kappa - 2\kappa f_1$$

für  $Z(x)$  die Differentialgleichung

$$Z'(x) = \frac{F(\kappa)}{U} \quad \text{mit} \quad \kappa = Z U' \dots (2).$$

Für die Grenzschicht an einem axial angeströmten Rotationskörper ohne Querströmung lautet der (1) entsprechende Impulsatz (vgl. <sup>1)</sup>, Formel (12, 38), S. 236)

$$U^2 \vartheta' + (2\vartheta + \delta^*) U U' + U^2 \vartheta \frac{r'}{r} = \frac{\tau_0}{\rho} \dots (3).$$

Dabei ist jetzt  $x$  die Bogenlänge in meridionaler Richtung; durch den Radius  $r = r(x)$  sei die Körperkontur gegeben. Macht man nun nach F. W. SCHOLKEMEYER (vgl. <sup>1)</sup> S. 236) dieselben Ansätze wie oben, so ergibt sich hier statt (2) die Differentialgleichung

$$Z' = \frac{1}{U} \left[ F(\kappa) - 2\kappa \frac{r'}{r} U \right] \quad \text{mit} \quad \kappa = Z U' \dots (4).$$

Es scheint nun noch nicht bemerkt worden zu sein, daß hier ein etwas anderer Ansatz zweckmäßiger ist. Wie man nämlich aus der MANGLER-Transformation (vgl. <sup>1)</sup> S. 181/182) sofort entnehmen kann, kommt man für

$$\bar{Z} = \frac{r^2 \vartheta^2}{\nu}$$

<sup>1)</sup> H. SCHLICHTING, Grenzschicht-Theorie, 3. Aufl., Karlsruhe 1958.



im wesentlichen wieder auf den zweidimensionalen Fall. Wählt man die übrigen Funktionen wieder wie oben, dann geht jetzt (3) über in die Differentialgleichung für  $\bar{Z}(x)$ :

$$\bar{Z}' = \frac{r^2}{U} F(\kappa) \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{\bar{Z}}{r^2} U' \dots (5).$$

Die Anfangsbedingungen im Staupunkt sind wieder dieselben wie bei SCHOLKEMEYER, also  $\kappa = 0,05708$  in einem räumlichen Staupunkt auf der Symmetrieachse und  $\kappa = 0,0770$  in einer Staulinie (etwa bei einem Ringflügel).

Es ist sehr befriedigend, daß die Differentialgleichung (5) eine Gestalt besitzt, die mit (2) bis auf den Faktor  $r^2$  (bzw.  $1/r^2$ ) übereinstimmt. Ein wesentlicher Vorteil bei der Verwendung von (5) ist noch, daß nicht wie bei (4) die Ableitung  $r'$  des Körperradius auftritt. Ist  $r(x)$  nicht analytisch gegeben, sondern nur numerisch bekannt, dann bedeutet dies die Ersparnis einer (nur ungenau ausführbaren) numerischen Differentiation.

*Verfasser:* Dr. KARL NICKEL, Karlsruhe, Brettenerstr. 9

## Effect of an Isolated Force Acting at a Point near a Rigid Circular Inclusion in a Plate

### Introduction

In a recent paper, SEN (1957) has given a simple method of solving the problem of an isotropic plate with displacements prescribed on a circular boundary. In this note, the problem of an isolated force acting at a point outside a rigid circular inclusion in a thin plate has been solved by using the above method.

### I. Method of solution

We take  $u$  and  $v$  to be the components of displacement along rectangular axes  $OX$ ,  $OY$ , and suppose that they are independent of the co-ordinate  $Z$ . Assuming further that the  $Z$ -component of displacement is zero, we get in the absence of body forces, the equations of equilibrium

$$\nabla_1^2(u, v) = -\frac{1}{1-2\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta \dots (1.1),$$

where

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \nabla_1^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

For generalized plane stress

$$\nu = \frac{\sigma}{1 + \sigma},$$

where  $\sigma$  is Poisson's ratio.

$\Delta$  being a plane harmonic function, we can put

$$\Delta = \text{Re } \Phi(z) \dots (1.2)$$

in which  $\text{Re}$  denotes the real part,  $z = x + iy$ , and  $\Phi(z)$  is an analytic function of  $z$  to be determined.

If the boundary of the circle be  $r = a$ , it can be easily found that the solutions of the equations (1.1) can be expressed as

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{4(1-2\nu)} \text{Re} \left[ (a^2 - r^2) \frac{\Phi(z)}{z} \right] + \text{Re} [g_1(z)], \\ v &= \frac{1}{4(1-2\nu)} \text{Re} \left[ (a^2 - r^2) \frac{i \Phi(z)}{z} \right] + \text{Re} [g_2(z)] \end{aligned} \right\} (1.3).$$

In the above expressions  $g_1(z)$  and  $g_2(z)$  are analytic functions of  $z$  such that

$$\left. \begin{aligned} [\text{Re } g_1(z)]_{r=a} &= [u]_{r=a}, \\ [\text{Re } g_2(z)]_{r=a} &= [v]_{r=a} \end{aligned} \right\} \dots (1.4).$$

From the given values of  $u$  and  $v$  on the circular boundary, it is possible in general to obtain the functions  $g_1(z)$  and  $g_2(z)$ . From (1.2) we have

$$\text{Re} [\Phi(z)] = \Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \dots (1.5).$$

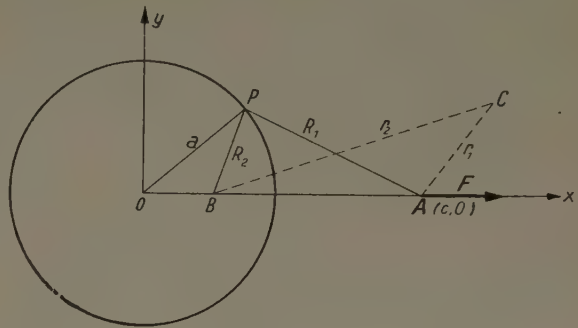
Calculating the values of  $\frac{\partial u}{\partial x}$  and  $\frac{\partial v}{\partial y}$  from (1.3), we find that the above result is satisfied if

$$\Phi(z) = \frac{2(1-2\nu)}{3-4\nu} [g_1'(z) + i g_2'(z)] \dots (1.6),$$

primes indicating that the functions have been differentiated with respect to  $z$ . Since  $g_1(z)$  and  $g_2(z)$  are supposed to be known, the values of  $\Phi(z)$  is given by (1.6) and hence from (1.3)  $u$  and  $v$  are completely determined.

### 2. Problem

Suppose in an infinite plate there is a force  $F$  acting at  $(c, 0)$  in the direction of the  $x$ -axis,  $c$  being greater than the radius  $a$  of the circular boundary which is



supposed to be rigidly fixed. Components of displacement due to such a force (neglecting rigid body displacements) are

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= -Q \left[ k \log r_1 + \frac{y^2}{r_1^2} \right], \\ v_1 &= Q(x-c) \frac{y}{r_1^2} \end{aligned} \right\} \dots (2.1),$$

where

$$Q = \frac{F}{2\pi\mu(1+k)}$$

$k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  for a thin plate, and  $r_1^2 = (x-c)^2 + y^2$ .

Let  $B$  be the inverse point of  $A$  with respect to the circle and  $R_1, R_2$ , the distances of the point  $P$  on the circle from  $A$  and  $B$  respectively. Then, since  $R_1/R_2 = c/a$ ,

$$\left. \begin{aligned} [u_1]_{r=a} &= -Q \left[ k \log R_1 + \frac{y^2}{R_1^2} \right]_{r=a} \\ &= -Q \left[ k \text{Re} \left\{ \log \left( z - \frac{a^2}{c} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + k(\log c - \log a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c} \text{Re} \frac{z^2 - a^2}{z - \frac{a^2}{c}} \right]_{r=a}, \\ [v_1]_{r=a} &= Q \left[ (x-c) \frac{y}{R_1^2} \right]_{r=a} = Q \left[ (x-c) \frac{y a^2}{c^2 R_2^2} \right]_{r=a} \\ &= \frac{Q}{2c} \left[ \text{Re} \frac{i z^2 - i a^2}{z - \frac{a^2}{c}} \right]_{r=a} \end{aligned} \right\} (2.2).$$

If the circular boundary be rigidly fixed, we are to find  $u_2, v_2$  from (1.3) such that

$$\left. \begin{aligned} [u_2]_{r=a} &= -[u_1]_{r=a} \\ &= Q \left[ k \operatorname{Re} \left\{ \log \left( z - \frac{a^2}{c} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + k(\log c - \log a) + \frac{1}{2c} \operatorname{Re} \frac{z^2 - a^2}{z - \frac{a^2}{c}} \right]_{r=a} \\ [v_2]_{r=a} &= -[v_1]_{r=a} = -\frac{Q}{2c} \left[ \operatorname{Re} \frac{i(z^2 - a^2)}{z - \frac{a^2}{c}} \right]_{r=a} \end{aligned} \right\} (2.3).$$

Thus for finding  $u_2$  and  $v_2$ , we can put in (1.3)

$$\left. \begin{aligned} g_1(z) &= Q \left[ k \log \left( z - \frac{a^2}{c} \right) + k(\log c - \log a) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2c} \frac{z^2 - a^2}{z - \frac{a^2}{c}} \right], \\ g_2(z) &= -\frac{iQ}{2c} \frac{z^2 - a^2}{z - \frac{a^2}{c}} \end{aligned} \right\} (2.4).$$

Hence from (1.6)

$$\Phi(z) = \frac{2(1-2\nu)}{3-4\nu} Q \left[ \frac{k}{z - \frac{a^2}{c}} + \frac{1}{c} \left\{ 1 + \frac{a^2}{c^2} \frac{c^2 - a^2}{\left( z - \frac{a^2}{c} \right)^2} \right\} \right] (2.5).$$

Substituting these values of  $\Phi(z)$ ,  $g_1(z)$ , and  $g_2(z)$ , we get  $u_2$  and  $v_2$  from (1.3). Values of displacement are then given by

$$u = u_1 + u_2, \quad v = v_1 + v_2 \quad (2.6).$$

To have an idea of the variation of the strength of the bond at  $r = a$ , the values of

$$[\widehat{xx} - \widehat{yy}]_{r=a} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right]$$

for  $c = 2a$ , and  $\nu = .25$  are determined, and given in the following table.

Table for  $c = 2a$ ,  $\nu = .25$  and  $S = EQ/a$ .

$\theta =$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\frac{1}{S} [\widehat{xx} - \widehat{yy}]_{r=a} =$	4.90	4.04	3.28	2.72	1.67	-.02	-.66	-.64	-.61	-.60

#### Reference

SEN, BIBHUTIBHUSAN, ZAMP Vol VIII (1957), p. 307.

Verfasser: SMRITIKANA BHOWMICK, Department of Mathematics, Jadavpur University, Calcutta-32, India

#### Dislocation of the First Order \*)

##### 1. Introduction

An analogue of what is called by COKER and FILON [1], The dislocation of the first order<sup>1</sup> had been considered by S. T. NEWING and W. M. SHEPHERD [2]

\*) Read at the UNESCO Symposium on "Non-linear Physical problems", Roorkee 1959 Dec.

with non-linear components of strain. The governing differential equation was solved graphically and certain special cases were examined using the method developed in an earlier paper [4]. In addition to the computational labour involved and the necessity of constructing suitable graphs for different cases under consideration, the method cannot be generalised.

Analytic solutions of the problems of [4] have already been obtained [3]. It is proposed now to solve the problem of dislocation of the first order.

Let a uniform circular tube undergo the following two types of deformations (i) let a small portion between two axial planes be removed and the edges so formed be united securely; (ii) let the tube be slit along an axial plane and the surfaces so formed be forced a small distance apart by means of a wedge, taking care to see that the slit surfaces remain always in axial planes. Let the internal radius of the tube be 1 and the external radius  $a$  and let the cylindrical surfaces be subjected to uniform normal forces  $P_1$  and  $P_2$ . We shall assume that the tube is in a state of plane strain; this can always be accomplished by the application of suitable edge tractions.

#### 2. Components of displacement, strain and stress

Let the axis of the cylinder be taken as the  $z$ -axis. Then  $x = r \cos \Theta$  and  $y = r \sin \Theta$ . Let the point which was initially at  $P'(Qr, A\Theta, z)$  move to  $P(r, \Theta, z)$ , where  $Q$  is a function of  $r$ ,  $A$  is a specified constant. Then we have

$$u = r \cos \Theta - Qr \cos A\Theta \quad (1.1),$$

$$v = r \sin \Theta - Qr \sin A\Theta \quad (1.2),$$

$$w = 0 \quad (1.3).$$

Using relations of the type

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.1),$$

$$e_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \left[ \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial z} \right] \quad (2.2),$$

$$\widehat{xx} = \lambda \delta + 2\mu e_{xx} \quad (2.3),$$

$$\widehat{yz} = \mu e_{yz} \quad (2.4),$$

we obtain

$$\begin{aligned} \widehat{xx} &= \frac{\lambda}{2} \{ 2 - (Q + rQ')^2 - A^2 Q^2 \} \\ &\quad + \mu [1 - (Q + rQ')^2 \cos^2 \Theta - A^2 Q^2 \sin^2 \Theta] \quad (3.1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{yy} &= \frac{\lambda}{2} \{ 2 - (Q + rQ')^2 - A^2 Q^2 \} \\ &\quad + \mu [1 - (Q + rQ')^2 \sin^2 \Theta - A^2 Q^2 \cos^2 \Theta] \quad (3.2), \end{aligned}$$

$$\widehat{xy} = -\mu [(Q + rQ')^2 - A^2 Q^2] \sin \Theta \cos \Theta \quad (3.3),$$

$$\widehat{zz} = \sigma(\widehat{xx} + \widehat{yy}), \quad \widehat{xz} = \widehat{yz} = 0 \quad (3.4),$$

where

$$Q' = \frac{dQ}{dr} \quad (3.5).$$

### 3. Satisfaction of the equations of equilibrium

$z$ -axis being the axis of the cylinder, and  $\widehat{z\bar{z}}$  being independent of  $z$ , the last of the three equations of equilibrium is identically satisfied. Each of the other two reduce to [2],

$$(Q + r Q') (2 r Q' + r^2 Q'') (\lambda + 2 \mu) + \lambda A^2 r Q Q' + \mu [(Q + r Q')^2 - A^2 Q^2] = 0 \quad (4).$$

Substituting  $t = \log r \dots \dots \dots (5.1)$   
we obtain

$$(Q + Q') (Q'' + Q') + \lambda A^2 Q Q' + \mu' [(Q + Q')^2 - A^2 Q^2] = 0 \quad (5.2),$$

here and hereafter,

$$Q' = \frac{dQ}{dt}, \quad \lambda' = \frac{\lambda}{\lambda + 2 \mu} \quad \text{and} \quad \mu' = \frac{\mu}{\lambda + 2 \mu} \quad (5.3).$$

Let us assume that its solution is given by

$$Q = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \dots \dots (6.1),$$

then

$$2 a_2 = A^2 a_0 (a_0 \mu' - a_1 \lambda') - \mu' (a_0 + a_1) - a_1 \quad (6.2),$$

$$6 a_3 = (a_0 + a_1)^{-1} [A^2 \{2 \mu' a_0 a_1 - \lambda' (2 a_0 a_2 + a_1^2)\} - (a_1 + 2 a_2)^2] - 2 \mu' (a_1 + 2 a_2) - 2 a_2 \quad (6.3)$$

and so on where  $a_n$  will be functions of  $a_0$  and  $a_1$  for  $n \geq 2$ .

It remains to be shown that the series converges in a certain region. Depending on the degree of accuracy desired in any problem, the first few terms may be taken as an approximation.

Dividing (5.2) by  $Q^2$  and substituting

$$\frac{Q'}{Q} = P \quad \dots \dots \dots (7.1),$$

we obtain

$$(1 + P) (P' + P^2 + P) + \lambda' A^2 P + \mu' [(1 + P)^2 - A^2] = 0 \quad (7.2).$$

Putting

$$1 + P = R \quad \dots \dots \dots (8.1),$$

we obtain

$$R R' + R^3 - C_1 R^2 + C_2 R - C_3 = 0 \quad (8.2),$$

where

$$C_1 = \lambda' + \mu', \quad C_2 = A^2 \lambda', \quad C_3 = A^2 C_1 \quad (8.3).$$

Putting

$$R = \frac{1}{T} \quad \dots \dots \dots (9.1),$$

we obtain

$$T' + C_3 T^3 - C_2 T^2 + C_1 T - 1 = 0 \quad (9.2),$$

Its solution may be written as

$$\int \frac{dT}{C_3 T^3 - C_2 T^2 + C_1 T - 1} + t = 0 \quad (9.3).$$

The denominator of the integrand is a cubic in  $T$  with real coefficients, hence there is at least one real root. (9.3) may thus be written as

$$\int \frac{A_1}{T - T_1} dT + \int \frac{A_2 T + A_3}{K T^2 - K_1 T + K_2} dT \quad (9.4),$$

which may be evaluated by elementary methods after finding the constants appearing therein. It has not been found possible to factorise the expression for general values of  $C_1$ ,  $C_2$  and  $C_3$ , but a few particular cases are demonstrated. Taking an extreme case where the body is incompressible  $\sigma = \frac{1}{2}$ , we obtain

for (9.3) a solution in closed form as

$$\log (T - 1) + \frac{1}{2} \log (A^2 T^2 + 1) - A \tan^{-1} (A T + 1) + (1 + A^2) t + K = 0 \quad (10).$$

Taking  $\lambda = \mu$  the cubic reduces to  $2 A^2 T^3 - A^2 T^2 + 2 T - 3$  which cannot be factorised immediately for arbitrary values of  $A$ . In particular taking  $A = 0.9$  and  $A = 1.1$  we obtain respectively

$$\int \frac{dT}{(T - 1.0345) (T^2 + 0.5967 T + 1.7901)} + 2 A^2 t = \text{constant} \quad (11)$$

$$\int \frac{dT}{(T - 0.969) (T^2 + 0.4264 T + 1.2793)} + 2 A^2 t = \text{constant} \quad (12).$$

The integral may be evaluated by elementary methods and a solution of the type (10) will be obtained. Negative values for  $T$  are inadmissible because of the first term. If we assume solutions in power series of  $t$  for (10), (11) and (12). They converge for all values of  $t$  except those that make  $T = 1$ ,  $T = 1.0345$  and  $T = 0.969$  respectively. Going through the substitutions in the reverse order one can obtain a solution of the equation (5.2).

If we assume the solution of (8.2) to be given by

$$R = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots \dots \dots (13.1),$$

we have

$$\left. \begin{aligned} b_0 b_1 + b_0^3 - c_1 b_0^2 + c_2 b_0 - c_3 &= 0 \\ 2 b_0 b_2 + b_1^2 + 3 b_0^2 b_1 - 2 c_1 b_0 b_1 + c_2 b_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13.2)$$

etc.  $b_n$  being a function of  $b_0$  for  $n \geq 1$ . This series must converge for all values of  $t$ , but one, in each case. Substituting (13) in (8.1) and (7.1), we obtain for  $Q$  a power series

$$Q = d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \dots \dots \dots (14.1),$$

where

$$\left. \begin{aligned} d_1 &= d_0 (b_0 - 1) \\ 2 d_2 &= d_0 b_1 + d_1 (b_0 - 1) \end{aligned} \right\} \quad (14.2).$$

etc.

The series (14.1) is the same as (6.1) except that the arbitrary constants appear differently.

### 4. The boundary conditions

The boundary conditions require that the normal tractions on the cylindrical surfaces should be equal to the uniform forces applied. That is

$$2 \widehat{r\bar{r}} = P_1 \lambda \quad \text{on } r = 1 \quad \text{and} \quad 2 \widehat{r\bar{r}} = P_2 \lambda \quad \text{on } r = a \quad (15)$$

where  $P_1$  and  $P_2$  are specified in advance.

$$2 \widehat{r\bar{r}} = \lambda \{2 - (Q + Q')^2 - A^2 Q^2\} + 2 \mu \{1 - (Q + Q')^2\} \quad (16.1).$$

Because of the complicated nature in which the constants occur in (6) we shall have to choose a finite number of terms for  $Q$  depending on the degree of accuracy desired. Taking  $Q = a_0 + a_1 t$ , the boundary conditions become,

$$2 - (a_0 + a_1 + a_1 t)^2 - A^2 (a_0 + a_1 t)^2 + 2 \mu_1 \{1 - (a_0 + a_1 + a_1 t)^2\} = \begin{cases} P_1 & \text{when } r = 1 \\ P_2 & \text{when } r = a \end{cases} \quad (17.1),$$

where

$$\mu_1 = \frac{\mu}{\lambda} \quad \dots \dots \dots (17.2).$$

Solving the equations we obtain

$$(K_{32} - K_{21}) S^2 + 2 (K_{22} - K_{21}) S + K_{12} - K_{11} = 0 \quad (18.1),$$

where

$$S = \frac{a_1}{a_0} \quad \dots \dots \dots (18.2),$$

$$K_1 K_{11} = 1 + A^2 + 2 \mu_1 \quad \dots \dots \dots (18.3),$$

$$K_1 K_{21} = 1 + 2 \mu_1 \quad \dots \dots \dots (18.4),$$

$$K_1 = -P_1 + 2 + 2 \mu_1 \quad \dots \dots \dots (18.5),$$

$$K_2 K_{12} = 1 + A^2 + 2 \mu_1 \quad \dots \dots \dots (18.6),$$



$$K_2 K_{22} = (1 + \log a) (1 + 2 \mu_1) + A^2 \log a \dots (18.7),$$

$$K_2 K_{32} = (1 + \log a)^2 (1 + 2 \mu_1) + A^2 (\log a)^2 \dots (18.8),$$

$$K_2 = -P_2 + 2 + 2 \mu_1 \dots (18.9).$$

After finding the value of  $S$  from (18.1) the value of  $a_0$  and  $a_1$  are obtained from (18.2), and

$$(K_{11} + 2 K_{21} S + K_{21} S^2) a_0^2 - 1 = 0 \dots (19).$$

This completes the solution of the problem for any specified values of  $A$ ,  $P_1$  and  $P_2$ , the elastic constants of the material of the tube being known. The case of  $P_1$  and  $P_2$  being equal to zero is of interest as it concerns also the problem of a curved plate which is bent by edge couples so that its initial curvature is either increased ( $A > 1$ ) or decreased ( $A < 1$ ).

The value of the couple  $M$  is given by

$$M = - \int_1^a \Theta \Theta r dr = M_1 \frac{\lambda}{2} \text{ (say) } \dots (20.1),$$

$$\text{From (3), } \Theta \Theta = \frac{\lambda}{2} \{ 2 - (Q + Q')^2 - A^2 Q^2 \}^2 + \mu (1 - A^2 Q^2) \dots (20.2).$$

Substituting the value, and integrating we obtain

$$M_1 = \{ (a_0 + a_1)^2 + A^2 a_0^2 - 2 - 2 \mu_1 (1 - A^2 a_0^2) \} \frac{a - 1}{2} + 2 a_1 \{ a_0 (1 + A^2 + 2 \mu_1 A^2) + a_1 \} I_1 + a_1^2 \{ (1 + A^2 + 2 \mu_1 A^2) \} I_2 \dots (20.3),$$

where

$$I_1 = \frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4} + \frac{1}{4} \dots (20.4),$$

$$I_2 = \frac{a^2}{2} (\log a)^2 - I_1 \dots (20.5).$$

The solution can be extended to the case where the tube consists of two different isotropic materials. Then  $Q$  will have two different values  $Q_1$  and  $Q_2$  in the two regions. Hence the equations corresponding to (5.2) will have solutions of the type (6) i. e. there will be four arbitrary constants to be evaluated. In addition to the two boundary conditions (15) at the free surfaces, we must impose the conditions

$$Q_1 = Q_2 \text{ and } \widehat{r} \bar{r}_1 = \widehat{r} \bar{r}_2 \text{ at the common boundary (21).}$$

The problem of an anisotropic material can also be solved similarly.

Values of  $a_0$ ,  $a_1$  and  $M_1$  are calculated and tabulated below for some typical cases.

$A = 0.9 \quad a = 1.1$				$A = 0.9 \quad a = 1.15$			
$\mu_1$	$a_0$	$-a_1$	$M_1$	$a_0$	$-a_1$	$M_1$	
0	1.2569	2.1062	-0.0005	1.2943	2.0790	-0.0556	
0.5	1.8939	2.1117	0.2747	1.7617	2.2543	0.2456	
1	2.0767	2.4877	0.6706	2.1171	2.4683	0.9700	
$A = 0.9 \quad a = 1.2$				$A = 1.1 \quad a = 1.1$			
$\mu_1$	$a_0$	$-a_1$	$M_1$	$a_0$	$-a_1$	$M_1$	
0	1.3384	2.0795	-0.1817	0.9913	1.8919	-0.0026	
0.5	1.7969	2.2316	0.2060	1.4718	1.9677	0.2321	
1	2.1472	2.4448	1.1481	1.6660	2.1375	0.6316	
$A = 1.1 \quad a = 1.15$				$A = 1.1 \quad a = 1.2$			
$\mu_1$	$a_0$	$-a_1$	$M_1$	$a_0$	$-a_1$	$M_1$	
0	1.0013	1.8882	-0.0551	1.0564	1.8618	-0.1964	
0.5	1.4011	1.9604	0.2164	1.4303	1.9425	0.1481	
1	1.7000	2.1211	0.9070	1.7277	2.1002	1.0621	

The strange values of  $M_1$  we obtain for the case  $\mu_1 = 0$  are due to the fact that the value of  $\sigma$  is not actually  $\frac{1}{2}$  for any real material. Taking the case of India rubber  $\sigma = 0.49$  we obtain the following table.

$a$	$A = 0.9$			$A = 1.1$		
	$a_0$	$-a_1$	$M_1$	$a_0$	$-a_1$	$M_1$
1.1	1.4707	2.1533	0.0372	1.1212	1.9152	0.02
1.2	1.5436	2.1269	0.622	1.1908	1.8924	0.0293

## References

- [1] E. G. COKER and L. N. G. FILON, Photoelasticity (1931), p. 319.
- [2] S. T. NEWING and W. M. SHEPHERD, Phil. Mag., vol. 24 (1938), p. 557.
- [3] J. RAMAKANTH, Proc. Theo. App. Mech. Kharagpur (1955), p. 153.
- [4] B. R. SETH and W. M. SHEPHERD, P. R. S. L., vol. 156 (1939), p. 171.

Versasser: J. RAMAKANTH, Dept. of Mathematics, Osmania University, Hyderabad, India

## Formeln zur numerischen Integration über Kreisbereiche

Gemäß der GAUSSschen Idee ist man beim Herleiten von Formeln zur angenäherten numerischen Auswertung von Integralen bestrebt, einen TAYLOR-abgleich bis zu Gliedern einer bestimmten Ordnung einschließlich unter Verwendung von möglichst wenig Punkten zu erzielen, indem man sowohl ihre Koordinaten als auch die Gewichte der an diesen Stellen genommenen Funktionswerte geeignet festlegt. In dieser Mitteilung sollen derartige Formeln — die für die Praxis durch die Möglichkeit, elektronische Rechenanlagen einzusetzen, gegenüber früher stark an Bedeutung gewonnen haben — für kreisförmige Integrationsbereiche ( $K: x^2 + y^2 \leq r^2$ ) zusammengestellt werden, und zwar neben bekannten auch einige neue höherer Ordnung.

Als Bausteine<sup>1)</sup> bieten sich — wegen der weitgehenden Übereinstimmung der in den TAYLOREntwicklungen auftretenden Differentialausdrücke — neben der Mittelwertformel

$$\frac{1}{r^2 \pi} \int_K u(x, y) dx dy = \sum_{n=0}^N \left( \frac{r}{2} \right)^{2n} \frac{1}{n!(n+1)!} \Delta^{2n} \bar{u} + \tilde{R}_{2N+2} \quad (1)$$

die Summen der Funktionswerte in den Eckpunkten regelmäßiger, Kreisen vom Radius  $\sigma_{2m} r$  bzw.  $\tau_{2m} r$  eingeschriebener Polygone an:

$$S_{2m}(\sigma_{2m} r) = \sum_{\mu=1}^{2m} \left( \sigma_{2m} r \cos \mu \frac{\pi}{m}, \sigma_{2m} r \sin \mu \frac{\pi}{m} \right) = 2m \left\{ \sum_{n=0}^N \left( \frac{r}{2} \right)^{2n} \frac{\sigma_{2m}^{2n}}{n! n!} \Delta^{2n} \bar{u} + 2 \sum_{l=1}^L \sum_{n=lm}^N \left( \frac{r}{2} \right)^{2n} \frac{\sigma_{2m}^{2n}}{(n+l m)! (n-l m)!} \times \Delta_{2lm}^{n-lm} \bar{u} \right\} + R^* \dots (2),$$

<sup>1)</sup> Eine ausführliche Erläuterung der Bezeichnungen, insbesondere der Operatoren  $\Delta_{2lm}^p$  ( $l = 0, 1, 2, \dots; p = 0, 1, 2, \dots$ ), sowie die Beweise für die Gültigkeit der TAYLOREntwicklungen in (1) und (2) findet man in [1]; der Beweis für (3) folgt unmittelbar aus dem für (2), indem dort überall  $\mu$  durch  $\mu - \frac{1}{2}$  ersetzt wird.

$$T_{2m}(\tau_{2m}r) = \sum_{\mu=1}^{2m} u\left(\tau_{2m}r \cos\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{m}, \tau_{2m}r \sin\left(\mu - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{m}\right) \\ = 2m \left\{ \sum_{n=0}^N \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \frac{\tau_{2m}^{2n}}{n!n!} \Delta^{n\bar{u}} + 2 \sum_{l=1}^L (-1)^l \times \sum_{n=lm}^N \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \frac{\tau_{2m}^{2n}}{(n+lm)!(n-lm)!} \times \Delta^{n-lm\bar{u}} \right\} + R^{**} \quad (3),$$

ferner

$$M_0 = u(0, 0) \quad (4).$$

Aus den einfachsten Ansätzen ( $N = 1, N = 3$  bzw.  $N = 2, N = 4$ )

$$R_{2N+2} = \frac{1}{r^2\pi} \iint_K u(x, y) dx dy - \{s_{4,1}S_4(\sigma_{4,1}r) + s_{4,2}S_4(\sigma_{4,2}r) + t_{4,1}T_4(\tau_{4,1}r)\}$$

bzw.

$$R_{2N+2} = \frac{1}{r^2\pi} \iint_K u(x, y) dx dy - \{m_0M_0 + s_{6,1}S_6(\sigma_{6,1}r) + s_{6,2}S_6(\sigma_{6,2}r) + t_{6,1}T_6(\tau_{6,1}r)\}$$

berechnet man leicht die Abstandsparameter  $\sigma_{2m}$  und  $\tau_{2m}$  sowie die Gewichte  $m_0, s_{2m}$  und  $t_{2m}$  für die ersten vier der in der Tabelle genannten Formeln; weitere Formeln enthalten auch andere Summen  $S_8, T_8, S_{10}, T_{10}, \dots$

Nr.	Stützstellen	Restglied	Gewichte	Abstandsparameter	Lit.
1	4	$R_4$	$t_{4,1} = \frac{1}{4}$	$\tau_{4,1}^2 = \frac{1}{2}$	[8]
2	7	$R_6$	$m_0 = \frac{1}{4}$ $t_{6,1} = \frac{1}{8}$	$\tau_{6,1}^2 = \frac{2}{3}$	[10]
3	12	$R_8$	$t_{4,1} = \frac{2}{27}$ $\left. \begin{matrix} s_{4,1} \\ s_{4,2} \end{matrix} \right\} = \frac{551 \pm 41\sqrt{29}}{6264}$	$\tau_{4,1}^2 = \frac{3}{4}$ $\left. \begin{matrix} \sigma_{4,1}^2 \\ \sigma_{4,2}^2 \end{matrix} \right\} = \frac{27 \mp 3\sqrt{29}}{52}$	[3], [4]
4	19	$R_{10}$	$m_0 = \frac{251}{2304}$ $t_{6,1} = \frac{125}{3072}$ $\left. \begin{matrix} s_{6,1} \\ s_{6,2} \end{matrix} \right\} = \frac{110297 \pm 5713\sqrt{111}}{2045952}$	$\tau_{6,1}^2 = \frac{4}{5}$ $\left. \begin{matrix} \sigma_{6,1}^2 \\ \sigma_{6,2}^2 \end{matrix} \right\} = \frac{96 \mp 4\sqrt{111}}{155}$	
5	28	$R_{12}$	$t_{8,1} = \frac{81}{3125}$ $\left. \begin{matrix} t_{4,1} \\ t_{4,2} \end{matrix} \right\} = \frac{7494892 \pm 1053263\sqrt{19}}{205200000}$ $s_{4,1} = 0,655791415454 \cdot 10^{-1}$ $s_{4,2} = 0,490399916287 \cdot 10^{-1}$ $s_{4,3} = 0,104912371962 \cdot 10^{-1}$	$\tau_{8,1}^2 = \frac{5}{6}$ $\left. \begin{matrix} \tau_{4,1}^2 \\ \tau_{4,2}^2 \end{matrix} \right\} = \frac{125 \mp 10\sqrt{19}}{183}$ $\sigma_{4,1} = 0,326655862701$ $\sigma_{4,2} = 0,720984642976$ $\sigma_{4,3} = 0,979798373636$	
6	41	$R_{14}$	$m_0 = \frac{2615}{43632}$ $t_{10,1} = \frac{16807}{933120}$ $s_{10,1} = 0,314864413570 \cdot 10^{-1}$ $s_{10,2} = 0,367783672793 \cdot 10^{-1}$ $s_{10,3} = 0,773026675860 \cdot 10^{-2}$	$\tau_{10,1}^2 = \frac{6}{7}$ $\sigma_{10,1} = 0,451092736034$ $\sigma_{10,2} = 0,751189560011$ $\sigma_{10,3} = 0,978468015039$	

Nr.	Stützstellen	Restglied	Gewichte	Abstandsparameter	Lit.
7	48	$R_{18}$	$\begin{Bmatrix} t_{8,1} \\ t_{8,2} \end{Bmatrix} = \begin{matrix} 4998 & 343 & 21 \\ 233 & 125 \end{matrix}$	$\begin{Bmatrix} \tau_{8,1}^2 \\ \tau_{8,2}^2 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} 21 & 21 \\ 28 \end{matrix}$	
			$\begin{matrix} s_{8,1} = 0,204136860290 \cdot 10^{-1} \\ s_{8,2} = 0,371360833569 \cdot 10^{-1} \\ s_{8,3} = 0,209029582465 \cdot 10^{-1} \\ s_{8,4} = 0,705690199725 \cdot 10^{-2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sigma_{8,1} = 0,255554289186 \\ \sigma_{8,2} = 0,554218094274 \\ \sigma_{8,3} = 0,858109669768 \\ \sigma_{8,4} = 0,980405947054 \end{matrix}$	
8	61	$R_{18}$	$m_0 = \begin{matrix} 496439663 \\ 13349499975 \end{matrix}$		
			$\begin{Bmatrix} t_{10,1} \\ t_{10,2} \end{Bmatrix} = \begin{matrix} 125504 + 16054\sqrt{7} \\ 8751645 \end{matrix}$	$\begin{Bmatrix} \tau_{10,1}^2 \\ \tau_{10,2}^2 \end{Bmatrix} = \begin{matrix} 14 & 17 \\ 18 \end{matrix}$	
			$\begin{matrix} s_{10,1} = 0,206024726860 \cdot 10^{-1} \\ s_{10,2} = 0,277365659974 \cdot 10^{-1} \\ s_{10,3} = 0,150158249601 \cdot 10^{-1} \\ s_{10,4} = 0,424511227320 \cdot 10^{-2} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sigma_{10,1} = 0,359912647292 \\ \sigma_{10,2} = 0,617569259064 \\ \sigma_{10,3} = 0,884020651636 \\ \sigma_{10,4} = 0,987194654007 \end{matrix}$	

## Bemerkungen zu den Nummern 5–8

- 1) Ein Querstrich über bzw. unter der letzten mitgeteilten Ziffer bedeutet, daß sie nach oben bzw. unten abgerundet worden ist.
- 2) Die Parameter  $\sigma_{2m,q}^2$  ( $q = 1, 2, 3$  bzw.  $q = 1, 2, 3, 4$ ) sind die Lösungen der folgenden Gleichungen dritten bzw. vierten Grades in  $\sigma^2 = \lambda$ :

Nr.	Gleichung
5	$6317094\lambda^3 - 10022245\lambda^2 + 4149900\lambda - 336375 = 0$
6	$11025\lambda^3 - 19020\lambda^2 + 9370\lambda - 1212 = 0$
7	$4960228\lambda^4 - 10267740\lambda^3 + 6746490\lambda^2 - 1476540\lambda + 70425 = 0$
8	$160901628\lambda^4 - 364759920\lambda^3 + 274856190\lambda^2 - 76570340\lambda + 6054195 = 0$

- 3) Die Gewichte  $s_{2m,q}$  ( $q = 1, 2, 3$  bzw.  $q = 1, 2, 3, 4$ ) ergeben sich anschließend durch Auflösen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

	Nr. 5	Nr. 6	Nr. 7	Nr. 8
$\sum_{q=1}^3 \text{ bzw. } \sum_{q=1}^4 s_{2m,q} =$	$\begin{matrix} 168899 \\ 1350000 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1432433 \\ 18849024 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 57719 \\ 675000 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 121827491812 \\ 1802182496625 \end{matrix}$
$\sum_{q=1}^3 \text{ bzw. } \sum_{q=1}^4 \sigma_{2m,q}^2 s_{2m,q} =$	$\begin{matrix} 7661 \\ 180000 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1075 \\ 31104 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 9427 \\ 270000 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 48541 \\ 1666980 \end{matrix}$
$\sum_{q=1}^3 \text{ bzw. } \sum_{q=1}^4 \sigma_{2m,q}^4 s_{2m,q} =$	$\begin{matrix} 71 \\ 3000 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 521 \\ 25920 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 193 \\ 9000 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 977 \\ 55566 \end{matrix}$
$\sum_{q=1}^4 \sigma_{2m,q}^6 s_{2m,q} =$			$\begin{matrix} 113 \\ 7200 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 671 \\ 52920 \end{matrix}$

Für  $k$ -dimensionale Kugeln ( $K_k: \varrho^2 = \sum_{j=1}^k x_j^2 \leq r^2$ ; Volumen  $V_k$ ) als Integrationsbereich kann man im

Falle rotationssymmetrischer Integranden  $u(\varrho)$  wesentlich einfachere Formeln verwenden. Wegen (vgl. [2])

$$\frac{1}{V_k} \int_{K_k} \dots \int u(\varrho) dx_1 \dots dx_k = \frac{k}{r^k} \int_0^r \varrho^{k-1} u(\varrho) d\varrho \quad (5)$$

ist nämlich die Theorie von CHRISTOFFEL über die Verallgemeinerung der GAUSSschen Quadraturformeln für Integrale mit vorgegebener Gewichtsfunktion anwendbar (vgl. [5], [6]); daraus folgt, daß bei Ansätzen

$$R_{4N+1} = \frac{1}{V_k} \int_{K_k} \dots \int u(\varrho) d\varrho = \sum_{n=0}^N a_n u(z_n r)$$

bzw.

$$R_{4N} = \frac{1}{V_k} \int_{K_k} \dots \int u(\varrho) d\varrho = \sum_{n=1}^N a_n u(z_n r)$$



(mit  $z_0 = 0; z_n > 0 (n = 1, \dots, N)$ ) die Abstandsparameter  $\alpha_n^2 (n = 1, \dots, N)$  Nullstellen der JAKOBISCHEN hypergeometrischen Polynome  $F_N\left(\frac{k}{2} + 1, \frac{k}{2} + 1, \alpha^2\right)$  bzw.  $F_N\left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \alpha^2\right)$  sind; bekanntlich [7] ist

$$F_p(x, \gamma, x) = 1 + \sum_{q=1}^p (-1)^q \binom{p}{q} \frac{(x+p)(x+p+1) \cdots (x+p+q-1)}{\gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+q-1)} x^q.$$

# Literatur

- [1] ALBRECHT, J., COLLATZ, L., Zur numerischen Auswertung mehrdimensionaler Integrale, ZAMM 39 (1958), S. 1—15.
- [2] COURANT, R., Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Band 2, 3. Aufl. (1955), S. 268—270.

- [3] HAMMER, P. C., STROUD, A. H., Numerical evaluation of multiple integrals II, MTAC XII (1958), S. 272—279.
- [4] HAMMER, P. C., Numerical evaluation of multiple integrals, in: Langer, R. E.: On Numerical Approximation, Madison 1959, S. 99—115.
- [5] HARTREE, D. R., Numerical Analysis, 2. Aufl. (1958), S. 120—124.
- [6] KOPAL, Z., Numerical Analysis (1955), S. 376—386.
- [7] MAGNUS, W., OBERHETTINGER, F., Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2. Aufl. (1948), S. 103, 107—108.
- [8] v. MISES, R., Formules de cubature, Revue Mathématique de l'Union Interbalkanique, Athen 1936, S. 17—31.
- [9] PEIRCE, W. H., Numerical integration over the planar annulus, Journ. Soc. Industrial and Appl. Math. 5 (1957), S. 66—73.
- [10] RADON, J., Zur numerischen Kubatur, Monatshefte für Mathematik 52 (1948), S. 286—300.

Verfasser: Dr. J. ALBRECHT, Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hamburg, Hamburg 13, Rothenbaumchaussee 67/69

## BUCHBESPRECHUNGEN

J. Kuntzmann, Méthodes Numériques. Interpolation. Dérivées. XVII + 253 S. m. 60 Abb. Paris 1959. Dunod Editeur. Preis geb. 3,600 F.

Der an sich klassische Gegenstand der Interpolation findet in diesem Buch eine vielfach neuartige Darstellung, die sich auf reiche Erfahrungen in der numerischen Arbeit stützt und daher in der Lage ist, viele nützliche Hinweise für die praktische Durchführung von Interpolationsrechnungen zu geben. Daneben hat die Theorie der Interpolation an vielen Stellen durch den Verfasser eine bemerkenswerte Vertiefung erfahren, so daß das Buch als in jeder Hinsicht modern angesprochen werden kann.

Das erste Kapitel beschäftigt sich mit dem Rechnen mit Polynomen und bringt in diesem Zusammenhang auch die klassischen Interpolationsformeln für beliebige und für gleichabständige Stützstellen und die in diesem Zusammenhang wichtigen Teile der Differenzenrechnung. Das zweite und dritte Kapitel sind der Theorie und Praxis der Interpolation, vor allem der Interpolation in Tafeln, der Untertafelung und der Abschätzung des Interpolationsfehlers (mit einer neuen Restglieddarstellung) gewidmet. Bemerkenswert sind hierbei die dazu angestellten statistischen Untersuchungen. Im vierten und fünften Kapitel wird von dem Fall zusammenfallender Stützstellen aus und im Anschluß an die klassischen Formeln von LAGRANGE-HERMITE und EULER-MAC LAURIN ausführlich auf die genäherte Differentiation von Funktionen eingegangen. Das sechste Kapitel behandelt die Interpolation in mehreren Variablen, insbesondere die Interpolation im Komplexen. Auch hier wird der Interpolation in Tafeln mit doppeltem Eingang besondere Aufmerksamkeit geschenkt. In den beiden letzten verhältnismäßig kurzen Kapiteln tritt das Praktische etwas mehr in den Hintergrund. Es wird eine allgemeine Theorie der Interpolation durch eine lineare Funktionenfamilie und des zugehörigen Interpolationsfehlers skizziert und auf spezielle Funktionenklassen angewendet und schließlich auch an einfachen Beispielen die Frage der Interpolation durch nicht-lineare Funktionenfamilien, z. B. rationale Funktionen und Kettenbrüche kurz erläutert. Alles in allem handelt es sich bei diesem Buch um eine wertvollen Bereicherung des Schrifttums der angewandten Mathematik. Es hat durchaus Lehrbuchcharakter, ist klar und präzise in der Darstellung und kann daher wärmstens empfohlen werden.

W. v. Koppfels und F. Stallmann, Praxis der konformen Abbildung. (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 100). XV + 375 S. m. 251 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. 69,— DM.

Das vorliegende Buch geht auf einen Plan zurück, den ein Kreis deutscher Funktionentheoretiker schon im zweiten Weltkrieg gefaßt hat. Es fußt auf einem Manuskript, daß v. KOPPELFELS, der bis 1945 in Brünn gewirkt hat, noch vor seinem frühzeitigen Tod fertigstellen konnte. Ursprünglich als Nachschlagwerk gedacht ist es ein ausgesprochenes Lehrbuch geworden, das in hervorragender klarer Form die Theorie der konformen Abbildung zusammenfaßt und ihre Anwendungen behandelt. Es beginnt bei den einfachen Tatsachen über komplexe Zahlen und Funktionen in geometrischer Darstellung und stellt schon in diesen einführenden Paragraphen einen engen Kontakt zu den Anwendungen auf ebene Vektorfelder her. Nach der Behandlung der wichtigsten elementaren Funktionen und der durch sie vermittelten konformen Abbildungen werden einige grundlegende Sätze aus der Potentialtheorie und der Funktionentheorie behandelt. Großes Gewicht wird auf die Theorie und Praxis der Polygonabbildungen, und zwar der Abbildungen sowohl von Geraden-, als auch von Kreispolygonen gelegt. In der Tat kommt ja diesen in den Anwendungsgebieten ganz besondere Bedeutung zu. Auch auf zweifach zusammenhängende Polygone wird eingegangen. Die Verfahren der genäherten konformen Abbildung kommen verhältnismäßig kurz weg, und auch Zahlenbeispiele fehlen. Der zweitgenannte, für die Herausgabe des Werkes verantwortliche Verfasser weist im Vorwort selbst auf diesen Mangel hin. Er hat mangels ausreichender eigener Erfahrungen auf eine ins Einzelne gehende Darstellung dieses Fragenkomplexes verzichten zu müssen geglaubt und verweist auf das bekannte Buch von BETZ, gibt aber in Fußnoten Hinweise auf einige neuere Arbeiten auf diesem Gebiet.

Der zweite Teil des Buches gibt einen auch im Text recht ausführlich gehaltenen Katalog und anschließend noch ein Verzeichnis der darin behandelten konformen Abbildungen. Hier ist — wie überhaupt im ganzen Buch — das Bildmaterial so außerordentlich reichhaltig, daß man sich an ihm allein schon ausgezeichnet orientieren kann. Die Zeichnungen sind von hervorragender Qualität. Nach seinem Inhalt und seiner Ausstattung ist dieses Buch der Jubiläumsnummer 100 in der gelben Reihe des Springer-Verlages würdig.

Dresden

H. HEINRICH

Dresden

H. HEINRICH

**B. G. Thomas**, *Elements of Calculus and Analytic Geometry*. X + 580 S. m. 268 Abb. London 1959. Addison-Wesley Publishing Company. Preis geb. \$ 7.50 bzw. 57 Shillings.

Der auch als Autor umfassenderer mathematischer Lehrbücher bekannte Verfasser legt mit diesem Buch eine Einführung in die Differential- und Integralrechnung von Funktionen einer Veränderlichen und in die ebene analytische Geometrie in einem Umfang vor, wie er etwa für einen einsemestrigen Kursus in Frage kommt. Die Darstellung, die sich dank des Umfangs des Buches einer großen Breite erfreuen darf, zeichnet sich durch didaktisches Geschick und große Klarheit aus. Sie nimmt in hohem Maße auf die Anwendungen Rücksicht und wird durch eine Fülle von Beispielen und Aufgaben unterstützt. Das Figurenmateriale ist wie die ganze Ausstattung hervorragend. Als einführendes Lehrbuch für Studierende technischer Fachrichtungen dürfte sich dieses Lehrbuch gut eignen.

Dresden

H. HEINRICH

**K. F. Zimmermann**, *Kompodium der Variationsstatistik*. 137 S. m. 10 Abb. Berlin 1959. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis 14,20 DM.

Verf. hat sich die zweifellos wichtige Aufgabe gestellt, den experimentierenden Wissenschaftlern und Studenten, insbesondere Biologen und Landwirtschaftswissenschaftlern, zu erschwinglichem Preis, unter Verzicht auf mathematische Vorkenntnisse, eine „kurz gefaßte Einführung in die Variationsstatistik“ zu bieten, die zwar nicht die neuesten Erkenntnisse auf diesem Gebiet vermitteln, aber die „unumstößlichen Grundlagen“ der heute gebräuchlichen statistischen Methoden behandeln und die daraus sich ergebenden Grenzen der Anwendbarkeit dieser Methoden klarstellen soll. Der Inhalt umfaßt: Einleitung und mathematische Vorbemerkungen (einfachste Rechenregeln für elementare Rechenoperationen), statistische Maßzahlen (Mittelwerte, Streuungsmaße, Schiefe, Exzeß, einfache und multiple Korrelations- und Regressionskoeffizienten), theoretische Verteilungen (Binomial-, Poisson-, Normal-, Student-,  $\chi^2$ -,  $F$ -Verteilung), empirische Verteilungen (Grundgesamtheit, Stichprobe), Prüfverfahren für normal verteilte Grundgesamtheiten (Testung, Schätzung und Vergleich von Mittelwerten, Prüfung und Vergleich von Varianzen, Bartlett-Test, Prüfung auf Korrelation 0, Vergleich von Verteilungen mittels  $\chi^2$ -Test), Varianzanalyse (einfache, doppelte mit 1 Wert je Zelle, lateinische Quadrate, Mehrfaktorenversuche, Test für Linearität der Regression), Kovarianzanalyse. Alle behandelten Methoden werden an zahlreichen, zumeist dem landwirtschaftlichen Versuchswesen entnommenen Zahlenbeispielen veranschaulicht. Die zur üblichen Testmethodik erforderlichen Zahlentafeln hat Verf. in einem Sonderband (Tabellen, Formeln und Fachausdrücke etc.; vgl. folgendes Ref.) zusammengestellt.

So sehr allerdings das vom Verf. abgesteckte Ziel und die entsprechende Stoffabgrenzung zu billigen sind, so sehr muß man leider bezweifeln, daß ihm die Bewältigung der Aufgabe restlos gelungen sei. Wichtige Grundbegriffe und Grundsätze werden oberflächlich oder verwirrend erklärt; so wird, um nur einiges anzuführen, Regression als „Abhängigkeit zweier Meßreihen voneinander“ definiert, die Regressionsgerade mit der Hauptachse der Konturellipsen gleichgesetzt, aus Verschwinden des Korrelationskoeffizienten auf stochastische Unabhängigkeit geschlossen, die Bezeichnung „Vertrauensgrenzen“ unterschiedslos auf unbekannte Verteilungsparameter wie auf tabulierte Quantile der klassischen Prüfverteilungen angewandt. Der Mathematiker vermißt

u. a. klare Herausstellung der zu testenden Nullhypothese, korrekte Formulierung der entsprechenden Test- und Schätzergebnisse, saubere Herausarbeitung der für die Anwendung der Schätz- und Testmethodik erforderlichen Bedingungen und der Voraussetzungen und Gültigkeitsgrenzen der grundlegenden Verteilungen, eindeutige, allgemeine Vorschriften über die Bestimmung der Freiheitsgrade bei  $\chi^2$ - und  $F$ -Testen. Verworren erscheint die Darstellung der Zusammenhänge zwischen Binomial- und ihren Grenzverteilungen und dunkel die Rolle des Zufalls bei Erklärung der Normalverteilung. Manche Flüchtigkeiten erschweren dem Leser ganz unnötig das Verständnis; so ist z. B. auf Seite 28–29 die Berechnung von  $s^2$  aus den quadrierten gegenseitigen Differenzen irreführender Weise mit dem falschen Nenner ( $n^2$ ) durchgeführt (was allein die als „vorläufig unwesentlich“ bezeichnete Abweichung vom üblichen  $s^2$ -Wert erklärt), während es seit C. GINI (1912) — nicht erst aus dem zitierten Büchlein von Gebelein und Heite — allgemein bekannt ist, daß die Summe aller quadrierten, paarweise gebildeten Differenzen  $n \cdot (n-1) \cdot s^2$  beträgt! Um bloße Druckfehler handelt es sich offen-

bar: Seite 17, wo in 4 Formeln „log“ fehlt und  $\sqrt{a} = 0$  behauptet wird; Seite 65, wo im Nenner von (46) das Zeichen! fehlt; Seite 103, wo die beiden Spalten 1, 2 der unteren Tabelle überflüssig sind und sich mit  $v$ ,  $b$  decken; Seite 120, untere Tabelle, letzte Spalte, wo  $n_i \cdot (Y_i - \bar{y})$  durch  $n_i \cdot (Y_i - \bar{y})^2$  zu ersetzen ist.

Ohne den Wortaufwand oder die Anforderungen an die Fassungskraft des Lesers im mindesten zu erhöhen hätten sich die zahlreichen — hier nicht alle erwähnbaren — sachlichen Mängel vermeiden und die wesentlichen Begriffe, Gedankengänge und Vorschriften einfacher, klarer und einwandfrei darlegen lassen. So kann das Büchlein zwar wohl manchem Leser wertvolle Anregungen und in den anschaulich vorgerechneten Beispielen praktische Winke für Nutzenanwendungen bieten, aber doch nicht allgemein und unbedingt als zuverlässiges Einführungsbuch empfohlen werden.

Bad Nauheim

M. P. GEPPERT

**K. F. Zimmermann**, *Tabellen, Formeln und Fachausdrücke zur Variationsstatistik*. 137 S. m. 10 Abb. Berlin 1959. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften. Preis geb. 14,20 DM.

Sowohl als Ergänzung zu dem oben besprochenen Kompodium als auch völlig selbständig wird Experimentatoren, die Versuche planen oder auswerten, das vorliegende Bändchen willkommen sein, in welchem Verf. für die speziellen Zwecke des landwirtschaftlichen Versuchswesens unentbehrliche, meist der bekannten Literatur entnommene Zahlentafeln zusammenstellt. Und zwar für Versuchsplanung: Tabellen von Zufallszahlen, Strukturpläne für lateinische Quadrate und Rechtecke, Gitteranlagen; dann allgemeine Tabellen der Quadrate und Quadratwurzeln, Reziproken, 7-stelligen Logarithmen, Fakultäten (bis 30!); ferner Tabellen der Prüfverteilungen: Normal-,  $t$ -,  $F$ - und  $\chi^2$ -Verteilung, und Signifikanzgrenzen für  $r$  zur Prüfung auf Korrelation 0. Es folgen der an einem Beispiel vorgeführte BARTLETT-Test und — vom Verf. selbst entwickelte — Verrechnungsschemata zur einfachen, doppelten (mit 1 Wert je Zelle) Varianzanalyse sowie zu derjenigen im lateinischen Quadrat. Den Tafeln gehen voran dreisprachige (deutsch, englisch, russisch) „Anweisungen zum Gebrauch der Tabellen“, eine Zusammenstellung der wichtigsten zugrundeliegenden Formeln sowie der verwendeten Symbole, Zeichen und Abkürzungen. Sehr nützlich erscheint die Liste von Fachausdrücken, die in deutscher, englischer und russischer Sprache gegenübergestellt sind.



In Tabelle 19 (Flächen der Normalverteilung) wäre allerdings wegen der Symmetrie die Hälfte der Tabelle entbehrlich; a fortiori stellt Tabelle 20 („Ordinaten der Summenprozentkurve der Normalverteilung“) eine völlig überflüssige Wiederholung dar. — Besonders entstellende Druckfehler fielen auf in Tab. 18 bei  $u = 1,40$ ,  $u = 1,55$ ; in Tab. 19 bei  $u = -0,63$ ;  $\mp 0,53$ ;  $\mp 0,32$ ; in Tab. 20 bei  $u = \mp 0,53$ ; in Tab. 27 bei  $n = 12$ ,  $p = 5\%$ ;  $n = 13$ ,  $p = 0,1\%$ ; in Tab. 28 bei 19! Ferner Seite 40, in  $\Phi(u)$ : obere Grenze des Integrals  $u$  statt  $+\infty$ . Zahlreiche geringfügigere Abweichungen gegenüber R. A. FISHERS Originaltabellen bzw. den verbreiteten klassischen Tafelwerken erklären sich wohl durch dem Verf. eigentümliche Rundungsregeln.

Undeutlich bleibt das der zugehörigen Formel auf Seite 40 widersprechende Beiwort „normiert“ bzw. „standardized“ bei der — für die Praxis völlig entbehrlichen, vom Verf. neu berechneten — Tab. 21 der Ordinaten der STUDENT-Verteilung, bei welcher schon der erste Wert 0,374989 (für  $n = 4$ ,  $t = 0$ ) den genauen Wert  $0,375 = 3/8$  schlecht approximiert.

Bei Benützung dieser Tabellen ist daher eine gewisse Vorsicht geboten. Abgesehen hiervon mag diese Zusammenstellung praktischer Hilfsmittel manchem Versuchsansteller von Nutzen sein.

Bad Nauheim

M. P. GEPPERT

**W. Prager, Probleme der Plastizitätstheorie.** 100 S. m. 52 Abb. Basel/Stuttgart 1955. Verlag Birkhäuser. Preis geb. 12.50 SFr.

**An Introduction to Plasticity.** VIII  $\times$  148 S. m. 82 Abb. London 1959. Addison-Wesley Publishing Company. Preis geb. \$ 6.50.

Die zweite Fassung ist eine Übertragung der ersten in die englische Sprache. In ihr finden sich neben einer stellenweise überarbeiteten Darstellung neu aufgenommene Abschnitte über die Eindeutigkeit von Lösungen in der Plastizitätstheorie, über „optimale“ Auslegung von Tragwerken und über das ebene Pressen eines endlichen Volumens zwischen begrenzten parallelen Platten. Dafür fällt die in der ersten Fassung enthaltene englischsprachige Zusammenfassung fort.

Der deutsche Titel trifft den Inhalt besser als der englische: In der Tat handelt es sich nur um (ausgewählte) Probleme, nicht um eine Einführung in die gesamte Plastizitätstheorie. Doch setzt das Buch keine speziellen Vorkenntnisse voraus und ist in sich abgeschlossen. Verf. beschränkt sich auf solche Fragen, an deren Untersuchung er selbst maßgeblich mitgewirkt hat. So entstand eine vorbildliche Darstellung, die geschickten didaktischen Aufbau mit äußerster Anschaulichkeit verbindet, aber dennoch kurz und (mit einer unten zu erwähnenden Ausnahme) exakt ist. Daher kommen Techniker wie Mathematiker auf ihre Kosten.

Die allgemeine Theorie idealplastischer Körper (bis zum Konzept des plastischen Potentials) wird anschaulich anhand kinematischer Modelle aufgebaut. Erste Anwendung auf das Beispiel eines Stabtragwerkes führt in der Folge zur allgemeinen Erweiterung der klassisch-technischen Festigkeitslehre auf Konstruktionen aus elasto-idealplastischen Werkstoffen, insbes. zu Traglastverfahren und zu Methoden des Entwurfes mit Rücksicht auf möglichst große Tragfähigkeit bei geringem Gewicht. Technische Umformvorgänge (große Formänderungen) werden nur unter Beschränkung auf das ebene Fließen behandelt, da dies ohne Aufwand mit den vorher entwickelten Hilfsmitteln geschehen kann. Man findet eine Analyse der Gleitlinienfelder (Sätze von PRANDTL/HENCKY) und Geschwindigkeitsverteilungen (Sätze von GERINGER) sowie mehrere Anwendungsbeispiele. Das

Buch ist mit zahlreichen Literaturhinweisen und (teilweise über den eigentlichen Stoff hinausführend) Aufgaben versehen.

Abschließend sei auf die o. e. Unkorrektheit hingewiesen, was besonders deshalb geschieht, weil sie sich auch in andere Darstellungen der Theorie des plastischen Potentials eingeschlichen hat. Um aus dem Fließkriterium  $F(\sigma) = \text{const.}$  auf das Stoffgesetz

$\epsilon_{ik} = \lambda \frac{\partial}{\partial \sigma_{ik}} F$  ( $\epsilon_{ik}$  = Formänderungsgeschwindigkeiten) zu schließen, setzt Verf. spezielle numerische Werte für die Spannungen  $\sigma_{ik}$  (nämlich  $\sigma_{ik} = 0$  für  $i \neq k$ ;  $\sigma_{ii}$  sind Hauptspannungen) schon vor der Differentiation ein. Zwar gelangt er bei vorliegendem Beispiel zum richtigen Resultat, doch ist das eher überraschend als selbstverständlich.

Hannover

H. LIPPMANN

**Beiträge zur Physik und Chemie des 20. Jahrhunderts.** Lise Meitner, Otto Hahn, Max von Laue zum 80. Geburtstag. Herausgeg. von O. R. Frisch, F. A. Paneth, F. Laves, P. Rosbaud. XI + 285 S. m. 89 Abb. u. 3 Porträts. Braunschweig 1959. Friedr. Vieweg & Sohn. Preis geb. 29,50 DM.

Die Herausgeber, unterstützt von einem Autorenkollektiv namhafter Wissenschaftler, haben den 80. Geburtstag der Jubilare zum Verfassen dieses Sammelbandes zum Anlaß genommen. Das Buch stellt insofern ein Wagnis dar, als recht verschiedene abstrakte Forschungsergebnisse auf dem Gebiete der Physik und der Chemie und deren weitere wissenschaftliche Anwendungen mit dem rein Persönlichen der drei Forscher in Verbindung zu bringen waren. Man darf dieses Vorhaben als gelungen bezeichnen, da die Autoren es verstanden haben, die Entwicklung der physikalisch-chemischen Anschauungen mit der Tätigkeit der drei Forscherpersönlichkeiten und ihrer Mitarbeiter und dem Wirken Ihrer Zeitgenossen eng zu verknüpfen.

Das Buch gliedert sich in 3 Teile, die nacheinander LISE MEITNER, OTTO HAHN und MAX VON LAUE gewidmet sind. Jeder Teil beginnt mit einem persönlich gehaltenen Bericht, verfaßt von langjährigen Freunden der 3 Wissenschaftler, der Erinnerungen an ihre damaligen Wirkungsstätten, an Lehrer und Mitarbeiter weckt. Die Autoren schildern eindringlich die primitiven Arbeitsverhältnisse und -methoden, das Überwinden der Mißerfolge und Irrungen und lassen die menschliche Größe und die Bedeutung der Jubilare als Wissenschaftler erkennen, die maßgeblich zum heutigen Wissensstand in Physik und Chemie beigetragen haben. Die wissenschaftlichen Beiträge zu diesem Sammelband berichten über die folgenden Gebiete:

1. die magnetischen Spektren der  $\alpha$ -Teilchen, die  $\gamma$ -Strahlen, die Entwicklung der Strahlungstheorie, die  $\beta$ -Strahlen, die Bremsstrahlung, die Atomkernisomerie,

2. radiochemische Untersuchungen und kurzlebige Spaltprodukte, Szintillationsspektrometrie, radiochemische Untersuchungen des Plutoniums, Anwendungen des radioaktiven Eisens, Versuche mit Astatin, Kristallwachstum und Mischkristallbildung, geochemische Folgerungen aus den HAHNSchen Arbeiten über Mitfällungen, die Herstellung radioaktiv markierter Farbstoffe.,

3. die Beugung von Röntgenstrahlen in Kristallen, die Kristallstruktur und die Kristallchemie, den Struktur- und Phasenbegriff in Mischkristallen, schwingende Atome in Kristallen, röntgenographische Untersuchungen organischer Moleküle, anomale Streuung, Struktur von Atomen und Atomaggregaten, Röntgenwellenfelder.

Die meisten Berichte skizzieren kurz die Entdeckungsgeschichte des behandelten Phänomens und



gehen dann ausführlich auf die z. Zt. vorliegenden Forschungsergebnisse ein, wobei die experimentellen Methoden und die theoretischen Grundlagen besprochen werden. Es werden auch Hinweise auf weitere notwendige Untersuchungen oder mögliche praktische Anwendungen gebracht. Einige Berichte sind sehr speziell gehalten.

Das Buch, dessen Beiträge vorwiegend in deutscher, aber auch in englischer und französischer Sprache abgefaßt sind, weist eine gute Ausstattung auf. Die Zahl der Druckfehler ist gering. Es wird nicht nur von der Generation der erfahrenen Wissenschaftler gern zur Hand genommen werden, sondern sollte wegen seiner dokumentarischen Bedeutung und des ethischen Gehaltes auch Freunde unter der Jugend finden.

Dresden

K. SCHWABE

Steuerungen und Regelungen elektrischer Antriebe. Herausg. Prof. Dr. Otto Mohr, Berlin, im Auftrage der VDI/VDE-Fachgruppe Regelungstechnik. 414 S. m. 299 Abb. Berlin 1959. VDE-Verlag. Preis geb. 36,— DM.

Das vorliegende Buch gibt in zum Teil erweiterter Form die auf der Aachener Tagung im Oktober 1958 gehaltenen 23 Vorträge wieder, die einen Überblick über den derzeitigen Stand der Technik auf dem Gebiet der Steuerungen und Regelungen elektrischer Antriebe vermitteln. Neben dem einführenden Vortrag über die Elemente zur Automatisierung von Antrieben und einem zusammenfassenden Bericht über den Einsatz von Transistoren lassen sich Vortragsgruppen erkennen, so über Walzwerks- und Fördermaschinenantriebe, Antriebe an Arbeitsmaschinen für durchlaufendes Arbeitsgut, Regelantriebe unter Benutzung von Recheneinrichtungen.

Die einzelnen Beiträge sind klar geschrieben und gut aufeinander abgestimmt. Das Hauptgewicht liegt bei der Erörterung der technischen Lösungen von Antriebsproblemen.

Das Buch ist denen, die sich für die Fortschritte auf dem Gebiete der Automatisierung der Antriebe interessieren, wärmstens zu empfehlen.

Dresden

H. KINDLER

T. R. Kane, *Analytical Elements of Mechanics*. Vol. 1. XV + 250 S. m. 223 Abb. London 1959. Academic Press. Preis geb. \$ 4.75.

Der vorliegende erste Band ist als der erste Teil einer zweibändigen Einführung in die Elemente der Technischen Mechanik gedacht, die sich vor allem das Ziel setzt, zur Lösung einfacher Aufgaben aus der Mechanik anzuleiten. Diesem Ziel entsprechend werden in jedem Abschnitt die neu eingeführten Begriffe sogleich an einer Vielzahl einfacher Aufgaben eingeübt.

Im ersten Abschnitt werden auf den ersten 40 Seiten der insgesamt 250 Textseiten die Grundbegriffe der Vektoralgebra bereitgestellt, und auch diese werden mit vielen Zahlenbeispielen und Abbildungen illustriert. Der zweite Abschnitt behandelt dann den Massenmittelpunkt, der dritte enthält den Momentenbegriff, während man erst im vierten Abschnitt und somit erst in der zweiten Hälfte des Buches das statische Gleichgewicht findet. Dort erst wird auch der Kraftbegriff über das Gravitationsgesetz eingeführt. Auf den abschließenden 47 Seiten enthält das Buch eine Sammlung von Aufgaben, von deren Lösung das Endergebnis mitgeteilt wird.

Das Buch dürfte auf Grund seiner Ausrichtung auf den amerikanischen Unterrichtsstil im deutschsprachigen Hochschulraum kaum als eigentliches Lehrbuch Verbreitung finden. Es kann aber wohl wegen seines darin enthaltenen Aufgabematerials für Lernende und Lehrende im Elementarunterricht von Nutzen sein.

Karlsruhe

F. WEIDENHAMMER

L. Robin, *Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroïdales*. Tome III. VIII + 289 S. m. 10 Abb. Paris 1959. Gauthier-Villars. Preis brosch. 5.500 F.

Die folgenden kurzen Bemerkungen haben die Absicht, Interessenten auf den erfreulichen Umstand hinzuweisen, daß nun auch seit einiger Zeit der dritte, der letzte Band des ROBINschen Werkes über Kugel- u. Sphäroidfunktionen erschienen ist; die ersten beiden dazugehörigen Bände sind bereits 1957 bzw. 1958 herausgekommen. Dieser dritte Band bringt im Kapitel VII (fortlaufender Zählung) eine Reihe von sogenannten Additionstheoremen für die LEGENDRESchen Funktionen  $P_n^m(\mu)$  und  $Q_n^m(\mu)$ . Das Kapitel VIII enthält eine ausführliche Diskussion der Anzahl und Lage der möglichen Nullstellen der LEGENDRESchen Funktionen, ferner eine Menge von Gleichungen, in denen die Variable  $\mu$  bzw. der Zeiger  $n$  als Unbekannte auftreten, und schließt mit rechnerischen Methoden zur Auflösung dieser Gleichungen. Im Kapitel IX offenbart sich endlich nochmals der ursprüngliche und eigentliche Bestimmungszweck der Kugelfunktionen, zur Lösung von Randwertproblemen der (klassischen) Physik und Technik zu dienen. Zunächst wird die HELMHOLTZsche Differentialgleichung auf ein solches System von speziellen orthogonalen Koordinaten umgeformt, von denen zwei Scharen zugehöriger Koordinatenflächen durch Rotation der Isothermen einer analytischen Funktion  $f(\zeta)$  um die imaginäre Achse erzeugt werden. Bei spezieller Wahl von  $f(\zeta)$  ( $= c \cdot \cosh \zeta$  usw.) ergeben sich u. a. Rotationsellipsoide als Koordinatenflächen; der Separationsansatz führt dann nach einer Variablensubstitution auf die „Differentialgleichung der Sphäroidfunktionen“ und im Spezialfall der LAPLACESchen Differentialgleichung auf die zugeordnete LEGENDRESche Differentialgleichung. Es folgt darauf u. a. die Lösung der inneren und äußeren ersten Randwertaufgabe für Rotationsellipsoide, den Kreisring, den Halbkugel, zwei sich nicht schneidende Kugeln und die Kugellinse. Das Kapitel X schließlich bringt Definition und Eigenschaften der sogenannten Sphäroidfunktionen,  $P_n^m(z; \gamma^2)$ ,  $Q_n^m(z; \gamma^2)$ , insbesondere die Reihendarstellung mit Hilfe LEGENDREScher Funktionen. Ein umfangreicher Katalog von neueren Arbeiten über diesen noch in der Entwicklung befindlichen Gegenstand, desgleichen ein Verzeichnis von Tabellen für LEGENDRESche Funktionen vervollständigt und beendet das Werk. Zu erwähnen ist noch, daß der Verfasser die Theorie um manche bisher noch nicht bekannte Tatsache und Formel bereichert hat. Das Werk ist — seinem Stil entsprechend — besonders als Nachschlagewerk geeignet und sollte deshalb in keiner Bibliothek fehlen.

Dresden

L. BITTNER

L. Félix, *Exposé Moderne des Mathématiques Élémentaires*. XVI + 421 S. Paris 1959. Dunod, Editeurs. Preis geb. 2.900 F.

Das vorliegende Buch behandelt in beschränktem Umfang die Grundlagen der elementaren Mathematik (z. T. der Schulmathematik), wobei konsequent von der axiomatischen Methode Gebrauch gemacht wird und außerdem diverse Bezeichnungen und Begriffe aus der modernen Mathematik verwandt werden. Es handelt sich dabei aber ausgesprochen um eine elementare Einführung in das Gebiet und nicht um „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt“. Die Lektüre des klar geschriebenen Buches sei besonders demjenigen empfohlen, der an Hand einer modern geschriebenen Darstellung mathematische Schulkenntnisse rekapitulieren und ergänzen will. Literaturangaben, die gerade für den Anfänger wichtig wären, fehlen.

Die Monographie ist in vier Hauptabschnitte (Bücher) eingeteilt. Buch I (Die fundamentalen Struk-

turen) befaßt sich nach einer kurzen Übersicht über die einfachsten Begriffe aus der Mengenlehre u. a. mit dem Aufbau des Systems der reellen Zahlen, mit Vektorräumen, reellen Funktionen und enthält ein Kapitel über die metrische (euklidische) Geometrie und eines über Maß und Wahrscheinlichkeit. Buch II ist der Arithmetik und Algebra gewidmet. Der Leser findet hier neben einer schönen Einführung in die elementare Zahlentheorie das Wichtigste über Polynome und ein interessantes Kapitel, das sich von einem allgemeineren Standpunkt aus mit der Äquivalenz von Gleichungen und Gleichungssystemen beschäftigt. Buch III (Analysis) geht zunächst auf das „lokale“ und „globale“ Verhalten von Funktionen einer Veränderlichen ein und schließt nach einigen kurzen Ausführungen über Stammfunktionen mit einem Kapitel über die komplexen Zahlen. Buch IV (Die Geometrien) behandelt im ersten Teil die Grundlagen der affinen und projektiven Geometrie, während der zweite Teil die metrischen Geometrien im euklidischen und nichteuklidischen Fall (LOBATSCHEWSKYsche Geometrie, POINCARÉsches Modell) untersucht. Eine Betrachtung der Kegelschnitte aus der Sicht der analytischen, affinen und projektiven Geometrie bildet den letzten Teil von Buch IV.

Dresden

M. LANDSBERG

A. Adam, Messen und Regeln in der Betriebswirtschaft. V + 179 S. Würzburg 1959. Physica-Verlag. Preis geb. 27,— DM.

Von der Leitung eines Betriebes wird heute mehr denn je verlangt, unter Zugrundelegung einer Menge bekannter Tatsachen gewisse Entscheidungen zu treffen. Der Verfasser entwickelt die informationswissenschaftlichen Grundlagen, um diese Entscheidungsprozesse rationeller gestalten zu können; denn Intuition allein dürfte heutzutage bei der Kompliziertheit der auftretenden Fragen kaum noch ausreichend sein. Für die Beschreibung und aktive Gestaltung betrieblicher Sachverhalte werden zweckmäßig ausgewählte Informationen benötigt, bei deren Beschaffung und Auswertung die mathematischen Methoden der Statistik und des „Operations Research“ eine wesentliche Rolle spielen. In diesem Sinne wird die Betriebsführung als Regelungsaufgabe betrachtet, wobei sich natürlich die kalkülmäßige Darstellung von Betriebsproblemen als besonders vorteilhaft erweist.

Sehr wertvoll sind die mitgeteilten Erfahrungen aus der Arbeit einer Stabstelle „Unternehmensforschung“. Derartige Arbeitsgruppen sollten sowohl in größeren Betrieben als auch auf volkswirtschaftlicher Ebene gebildet werden. Ihre Aufgabe besteht im Sammeln und „Veredeln“ von Informationen im Sinne des vorliegenden Buches und damit in einer wirkungsvollen Unterstützung bei der Leitung und Lenkung der Wirtschaft.

Ein umfangreicher Anhang, der Literaturangaben und Kommentare zu dem Ausgeführten vermittelt, rundet das vor allem für Wirtschaftsmathematiker sehr empfehlenswerte Buch ab. Aber auch Ökonomen sollten sich gleichermaßen diesem Buch widmen, obwohl ihnen die entwickelten Gedankengänge anfangs recht fremd erscheinen werden. Die zahlreichen treffenden Beispiele dürften das Studium jedoch wesentlich erleichtern.

Merseburg

I. PIEHLER

Anwendungen der Matrizenrechnung auf wirtschaftliche und statistische Probleme. Herausg. A. Adam unter Mitarb. v. F. Ferschl, A. Klammecker, A. Klingst, O. Pichler, J. Roppert, H. Scholz, K. Wenke u. W. Wetzel. (Einzelschriften der Deutschen Statistischen Gesellschaft, Nr. 9). Würzburg 1959. Physica-Verlag. Preis geb. 28,— DM.

Es handelt sich bei dieser Monographie um eine im Auftrage der Dtsch. Statistischen Gesellschaft unter

der Redaktion und tätigen Mitarbeit von A. ADAM (Wien) entstandene Artikelsammlung über den im Titel genannten Themenkreis.

Auf den ersten Seiten gibt KLINGST eine die Rechenregeln, den Determinantenbegriff, die Gleichungslösung (CRAMERSche Regel) und eine Skizze des speziellen Eigenwertproblems umfassende Einführung in die Matrizenrechnung. Danach beschreibt PICHLER Matrizenanwendungen bei Betriebskostenrechnungen und der Erfassung der linearen Abhängigkeiten, die zwischen den in Leistungsverflechtung zueinander stehenden Fertigungsstellen von Großbetrieben herrschen. Die zwei darauffolgenden Artikel von WENKE (Matrizenmodelle in der Großindustrie) und KLAMMECKER (Input-Output-Analyse) sind verwandten Fragen gewidmet. Unter der Überschrift „Theoretische Grundlagen des linearen Programmierens“ leitet WETZEL die für die numerische Lösung von Aufgaben der Linearplanung fundamentalen Sätze, nämlich das Simplex-Theorem, das Simplex-Kriterium und die Dualitätstheoreme her; ferner gibt er eine Darstellung der Theorie der Matrizen Spiele und der Einsatz-Ausstoß-Analyse im Hinblick auf lineare Programmierungsaufgaben. Der sich anschließende Abschnitt von FERSCHL ist den rechnerischen Verfahren zur Lösung linearer Programmierungsprobleme, der Simplex-Methode gewidmet.

Der Artikel von ADAM — anscheinend eine Originalarbeit — über das maximale Bestimmtheitsmaß leitet den statistischen Teil der Matrizenanwendungen ein; fortgesetzt wird dieser von ROPPERT mit einer matrizenmäßigen Darstellung  $n$ -dimensionaler Verteilungen, insbesondere der  $n$ -dimensionalen GAUSS-Verteilung, der Regression und benachbarter Fragen ( $\chi^2$ ,  $F$ -Verteilung). Die ganze Schrift wird beschlossen mit einem Abschnitt von SCHOLZ über Verfahren zur praktischen Lösung von Matrizenaufgaben, das Verfahren von GAUSS-BANACHIEWITZ, von GAUSS-SEIDEL, HESSENBERG und das Iterationsverfahren zur Bestimmung des betragsgrößten Eigenwertes.

Vom Standpunkt dieser Zeitschrift aus muß man der vorliegenden Schrift eine weite Verbreitung — auch in Kreisen von Nicht-Fachmathematikern — wünschen; als besonders verdienstvoll können die beiden Beiträge von WETZEL und FERSCHL über die heutzutage sehr aktuellen Fragen der linearen Planungsrechnung erwähnt werden. Noch zählen ja Schriften über diese Gegenstände in der deutschsprachigen Literatur zu den Seltenheiten. Als unbedingten Vorzug muß man den beiden Aufsätzen überdies die konsequente Verwendung der Matrizen Schreibweise und des Matrizenkalküls anrechnen, durch welche die Verfasser zu einer straffen, aber umfassenden Darlegung auf einer dem Leser zumutbaren Anzahl von Seiten gelangen.

Dresden

L. BITTNER

J.F. Holbrook, Laplace Transforms for Electronic Engineers. XIII + 259 S. m. 170 Abb. London 1959. Pergamon Press. Preis geb. 50 s net.

Wie aus dem Titel des Buches bereits hervorgeht, richtet es sich in erster Linie an den Elektroingenieur, um ihn mit der Theorie der LAPLACE-Transformation und deren Anwendungen vertraut zu machen. Wörtlich heißt es: „LAPLACE transform theory is a philosophy of logic and analytical reasoning which allows one to analyze and synthesize electronic circuitry, networks, filters, oscillators, servo-systems, etc., with much less effort and far more accuracy and depth of understanding than most engineers can develop when using older methods.“

Da das Buch auch einem Leser mit nur bescheidenen mathematischen Vorkenntnissen verständlich sein soll, beginnt es mit einer Einführung der komplexen Zahlen und der Funktionen einer komplexen Ver-



änderlichen. Am Beispiel der rationalen Funktionen wird der Residuensatz erläutert. Von der FOURIERschen Reihe gelangt man dann über das FOURIERsche Integral zur LAPLACE-Transformation. Daß die mathematischen Beweise zum Teil unvollständig sind oder ganz weggelassen wurden, ist kein Nachteil, sofern darauf aufmerksam gemacht wird. Es sollten aber in jedem Fall die Gültigkeitsgrenzen angegeben werden, was beispielsweise bei der wichtigen Formel (3.2) nicht geschehen ist, die schon für die einfache Funktion (7.5) falsch ist.

Die technischen Anwendungen beziehen sich im wesentlichen auf die in dem obenstehenden Zitat angegebenen Gebiete. Dabei tritt auch die DIRACSche Deltafunktion in der zwar üblichen, aber nicht einwandfreien Definition auf. Da jedoch keine partiellen Differentialgleichungen vorkommen, wird in dem Buch gerade derjenige Teil der Operatorenrechnung behandelt, der nach J. MIKUSIŃSKI ohne LAPLACE-Transformation mit einem wesentlich geringeren Aufwand völlig elementar dargestellt werden kann. Trotzdem ist natürlich jeder Beitrag, der für die Verbreitung der LAPLACE-Transformation unter den Elektrotechnikern sorgt, zu begrüßen.

Halle/Saale

L. BERG

V. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*. XVIII + 411 S. London 1959. Pergamon Press. Preis geb. £ 5 net.

Im vorliegenden Buche wird zunächst die „Spezielle Relativitätstheorie“ („Theory of Space-Time“) und dann die „Allgemeine Relativitätstheorie“ („Theory of Gravitation“) ausführlich dargestellt. Dabei ist im ersten Teil durchaus die EINSTEINSche Auffassung dieser Theorie beibehalten, nicht dagegen im zweiten Teil. FOCK ist in zwei wesentlichen Punkten anderer Meinung als EINSTEIN:

1. Er ist der Ansicht, daß den Gleichungen, welche den metrischen Fundamental-Tensor  $g_{\mu\nu}$  mit dem Energie-Impuls-Tensor der Materie  $T_{\mu\nu}$  verknüpfen, unbedingt gleichberechtigt Anfangs- oder Randbedingungen hinzugefügt werden müssen. (Da es sich um partielle Differentialgleichungen handelt, ist die Lösung sonst nicht eindeutig bestimmt!) Für Probleme innerhalb unseres Sonnensystems schlägt Fock als Randbedingung vor, zu verlangen, daß  $g_{\mu\nu}$  im Unendlichen pseudo-euklidische Werte annehme. Die  $g_{\mu\nu}$  sind dann bis auf LORENTZ-Transformationen eindeutig durch  $T_{\mu\nu}$  bestimmt.

2. Bei einem solchen Vorgehen werden natürlich gewisse Koordinaten-Systeme vor anderen ausgezeichnet, d. h. die allgemeine Kovarianz geht verloren. Fock meint, daß die EINSTEINSche Forderung nach allgemeiner Kovarianz sowieso physikalisch inhaltlos sei. Wesentlich für die Theorie der Gravitation sei nur das Gesetz der Gleichheit von schwerer und träger Masse.

Tatsächlich wird im vorliegenden Buch die Theorie der Gravitation unter Berücksichtigung dieser beiden Gesichtspunkte ausführlich und gründlich dargestellt. Das Buch läßt (in der ausgezeichneten Übersetzung von N. KEMMER) m. E. keinen Punkt unklar. Es ist vorzüglich geeignet, die Diskussion über diese verschiedenen Auffassungen der EINSTEINSchen Theorie der Gravitation, die ja auch in der UdSSR keineswegs abgeschlossen ist, in sachlicher Form einem größeren Kreise von Physikern nahe zu bringen.

Jena

G. HEBER

G. Asser, *Einführung in die Mathematische Logik*, Teil I. IV + 184 S. Leipzig 1959. B. G. Teubner — Verlagsgesellschaft. Preis geb. 11,25 DM.

Dieser 1. Teil stellt eine mathematische Theorie der klassischen Aussagenlogik dar — der 2. Teil

wird die klassische Prädikatenlogik, der 3. Teil die sogen. Stufenlogik (also die RUSSELLsche Mengenlehre) behandeln. In der klassischen Aussagenlogik betrachtet man die Aussageformen (zusammengesetzt aus Variablen mit den Junktoren: und, oder, nicht u. a.), die bei jeder Einsetzung von Aussagen für die Variablen in eine wahre Aussage übergehen.

In §§ 1—3 werden diese „Identitäten“ eingeführt, und § 4 gibt eine Sammlung der wichtigsten von ihnen. Um von einem Ausdruck zu entscheiden, ob er eine Identität ist, kann man ihn zunächst auf eine Normalform (wie die Polynome in der Algebra) bringen. Das wird in § 5 dargestellt. Damit ist diese Theorie eigentlich abgeschlossen. Sie ist mathematisch trivial, Verf. verwendet aber — mit einer wohl für Nichtmathematiker berechneten Breite — hierfür 70 Seiten (6 Seiten behandeln eine Anwendung auf elektrische Schaltungen).

Die restlichen 110 Seiten (mit Ausnahme der 5 Seiten von § 10, die hätten vorweggenommen werden können) behandeln eine Frage, die nur für die intuitionistische Aussagenlogik und teilweise für die Prädikatenlogik wichtig wird, die Frage der Axiomatisierbarkeit der Klasse der Identitäten. Diese Frage wird in § 6 formuliert.

Verf. trägt im wesentlichen die Lösung von HILBERT-BERNAYS mit einem 15-gliedrigen Axiomensystem „ $\text{axa}$ “ vor. Die Vollständigkeit von  $\text{axa}$  wird in § 7 auf 20 Seiten nach POST bewiesen — obwohl, wie Verf. selbst bemerkt, der „Grundgedanke... außerordentlich einfach“ ist. Ein kürzerer Beweis von WAJSBERG und (in § 8) Beweise von HENKIN und KALMAR folgen. Die Diskussion verschiedener Begriffe von Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit in § 8 ist wiederum erschöpfend und trivial. § 9 behandelt die Unabhängigkeit von  $\text{axa}$ .

Das Buch schließt mit einer Darstellung der GENTZENschen Axiomatisierung (§ 11), deren Vollständigkeit auf die von  $\text{axa}$  zurückgeführt wird, und mit Bemerkungen zum allgemeinen Kalkülbegriff (§ 12).

Zusammenfassend muß gesagt werden, daß diese mathematische Theorie nur vom Standpunkt eines „l'art pour l'art“ gerechtfertigt werden kann. Für die Anwendungen der klassischen Aussagenlogik in der Mathematik (sei es Arithmetik, Analysis oder auch Algebra und Topologie) ist nur der erste Teil (§§ 1—5) wichtig. Solange man sich auf die klassische Aussagenlogik beschränkt, müssen die Axiomatisierungsfragen als willkürlich erscheinen. Ob die Behandlung solcher Fragen durch die „Schönheit“ der Antworten gerechtfertigt wird, ist selbstverständlich Ansichtssache. Verf. schließt sich hier unkritisch den Auffassungen der Berliner Schule von K. SCHROETER an. Ein Nachteil dieser mathematischen Schönheit ist leider ihre relative Trivialität: Für einen Nichtmathematiker mag das alles schwierig sein (insbesondere weil er die scholastische Terminologie nicht sofort durchschauen wird), jemanden, der an den ausspruchsvolleren Theorien der Mathematik geschult ist, wird man auf diese Weise aber kaum für die Logik interessieren können.

Kiel

P. LORENZEN

W. Olszak, *Non-Homogeneity in Elasticity and Plasticity*. VII + 528 S. London 1959. Pergamon Press. Preis geb. £ 5 net.

Bei der Durchsicht dieses Buches, das die Vorträge des Symposiums der IUTAM vom September 1958 in Warschau enthält, ist man versucht, den Namen für ein Omen zu halten. Aber das liegt in der Natur der Sache; denn der Begriff „Inhomogenität“ ist nicht fest umrissen und wird sehr vielseitig gebraucht. Wir finden so beispielsweise neben der Betrachtung von Körpern, die aus verschiedenen Werkstoffen diskontinuierlich zusammengesetzt sind (wobei die



Zusammensetzung teils geometrisch, teils statistisch definiert ist), auch die Betrachtung solcher Körper, die zwar aus einem einheitlichen Werkstoff bestehen, deren Werkstoffeigenschaften aber stetig vom Ort abhängen (z. B. als Folge der örtlichen Temperaturverteilung oder der ortsabhängigen Werkstoffverfestigung, oder aber auch als Folge unterschiedlicher Armierung, sofern man die Armierung in die Werkstoffeigenschaften einbezieht). Andere Betrachtungen beschränken sich auf anisotrope Werkstoffe, und schließlich finden sich in diesem Rahmen auch solche Betrachtungen, die nur noch einen sehr losen Zusammenhang mit dem Generalthema haben, wie beispielsweise einige allgemeine Betrachtungen über große Formänderungen oder über komplexes Werkstoffverhalten.

Der Herausgeber, W. OLSZAK, war sich der Schwierigkeiten, diese „Inhomogenität“ zu ordnen, wohl bewußt. Er hat sie zu ordnen versucht durch eine Einteilung in 6 Abschnitte: I. Elastizität, II. Plastizität, III. Rheologie, IV. Dynamische Probleme, V. Statistische und Mikro-Inhomogenität, VI. Verschiedenes. Aber auch innerhalb dieser Abschnitte ergibt sich noch eine solche Streuung der Beiträge (insgesamt sind es 55, zu denen noch einige Diskussionsbemerkungen kommen), daß es hier unmöglich ist, einen vollständigen Überblick über die aufgegriffenen Probleme zu geben. Es müssen deshalb folgende Hinweise genügen:

Im Rahmen der Elastizitätstheorie werden überwiegend solche Probleme betrachtet, die sich zweidimensional behandeln lassen. Dabei wird weitgehend von funktionentheoretischen Hilfsmitteln Gebrauch gemacht. Die plastizitätstheoretischen Betrachtungen bilden den größten Abschnitt dieses Buches. Aus den vielseitigen Beiträgen hierzu wird deutlich, daß es eine geschlossene Theorie plastischer Formänderungen, die über die Theorie des idealplastischen Werkstoffverhaltens (klassische Theorie) hinausgeht, noch nicht gibt. Wir finden wohl einige allgemeine Betrachtungen über die Voraussetzungen und den Gültigkeitsbereich gewisser Theoreme (hier sind die Arbeiten von OLSZAK und seiner Co-Autoren hervorzuheben), aber im übrigen beschränken sich alle Ansätze zur Erweiterung der klassischen Theorie darauf, gewisse Beziehungen dieser Theorie (Fließbedingung, Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen) zu verallgemeinern, ohne zu prüfen, ob dadurch der Gesamtaufbau der Theorie widerspruchsfrei bleibt. Hinsichtlich ihrer Tragweite hinterlassen deshalb die verschiedenen Ansätze, die sich im speziellen Falle durchaus bewähren können, beim Leser ein unsicheres Gefühl.

Die übrigen 4 Abschnitte haben einen wesentlich geringeren Umfang. Die rheologischen Betrachtungen stellen für einige spezielle Probleme den Zeiteinfluß in Rechnung. Die dynamischen Betrachtungen gelten vor allem der Wellenausbreitung. Der Abschnitt V bezieht sich im wesentlichen auf Zwei-Stoff-Systeme. In Abschnitt VI sind schließlich die Beiträge zusammengefaßt, die ein wenig abseits vom Generalthema liegen.

Zusammenfassend kann man sagen: Die Stärke dieses Buches liegt gewiß nicht in seiner inneren Geschlossenheit, sondern darin, daß es die Vielfältigkeit der Probleme, Lösungsmöglichkeiten und -Versuche auf dem weiten Gebiet des Generalthemas widerspiegelt und damit eine Quelle von Anregungen ist. Es läßt ahnen, wie interessant es für die Teilnehmer an diesem Symposium gewesen sein muß, sich zu begegnen.

Hannover

TH. LEHMANN

E. Artin, *Galoissche Theorie*. 86 S. Leipzig 1959. B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft. Preis geb. 5,30 DM.

Bei dem vorliegenden Buch handelt es sich um eine Übersetzung des in englischer Sprache erschienenen

Buches „Galois Theory“, die gegenüber den beiden vorhergehenden Auflagen einige Änderungen aufweist (s. etwa den Beweis des Fundamentalsatzes der GALOISTHEORIE).

Die GALOISTHEORIE wird in der deutschsprachigen Literatur in den Lehrbüchern der Algebra behandelt, in denen sie zwar einen Kernpunkt bildet, nicht aber alleiniger Inhalt ist. Dem Verfasser ist es auf sehr knappem Raum gelungen, ausgehend von der Definition des Körperbegriffs — also nahezu ohne Verwendung algebraischer Kenntnisse — bis zu den wesentlichen Sätzen der GALOISTHEORIE und deren Anwendungen vorzudringen. Es ist daher sehr zu begrüßen, daß dieses Buch durch die Übersetzung auch den deutschen Lesern zugänglich gemacht ist.

Im einzelnen gliedert sich das Buch in drei Kapitel. Im 1. Kapitel werden auf 15 Seiten die im weiteren verwandten Elemente der linearen Algebra (Körper, Vektorraum, lineare Unabhängigkeit, lineare Gleichungssysteme, Determinanten) hergeleitet.

Das 2. Kapitel, überschrieben „Körpertheorie“, ist das Kernstück des Buches. Es umfaßt im wesentlichen die Theorie der endlichen separablen algebraischen Erweiterungen. Darüber hinaus findet man hier u. a. den Basissatz für endlich erzeugbare abelsche Gruppen, eine Behandlung der NOETHERSchen Gleichungen und einen Abschnitt über KUMMERSche Körper.

Das 3. Kapitel (von N. A. MILGRAM) behandelt als Anwendungen der GALOISTHEORIE die Auflösbarkeit von Gleichungen durch Radikale, die GALOISgruppe der allgemeinen Gleichung  $n$ -ten Grades und die Konstruktionen mit Zirkel und Lineal.

Dresden

M. HASSE

C. C. Lin, *Turbulent Flows and Heat Transfer*. XV + 549 S. m. zahlr. Abb. Princeton, New Jersey 1959. Princeton University Press. Preis geb. \$ 15.00.

Dieses Buch ist anscheinend der zweite bisher erschienene Teil eines zwölfbändigen Sammelwerks „High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion“, in dem es den Band V bilden soll. Wie schon in der Besprechung des zuerst erschienen Bandes VI (ZAMM 37 (1957), S. 239) angegeben, sollten darin die Probleme, die mit der Aerodynamik hoher Fluggeschwindigkeiten und dem Strahlantrieb zusammenhängen, ausführlich behandelt und dabei Überblicke über die grundlegenden Wissenschaftsgebiete gegeben werden. Solche Übersichten sind um so notwendiger, je schneller Fortschritte erzielt werden und je stärker sich die Strömungslehre in spezielle Forschungsgebiete zergliedert. Für uns sind sie besonders wertvoll, denn es handelt sich oft um extreme Probleme des Flugs von Raketen und Satelliten, die wegen ihrer räumlichen und finanziellen Dimensionen nur noch von den beiden Großmächten ausführlich erforscht werden können. Entsprechend sind die Anwendungsbereiche und Beispiele anders als in früheren Büchern über Turbulenz und Wärmeübergang, obwohl das aus den folgenden Titeln der Hauptabschnitte nicht hervorgeht: A) Laminar-turbulenter Umschlag, H. L. DRYDEN; B) Turbulente Strömung, G. B. SCHUBAUER und C. M. TCHEN; C) Statistische Turbulenztheorien, C. C. LIN; D) Wärmeleitung, M. YACHTER und E. MAYER; E) Wärmeübergang und Reibung in Flüssigkeiten, R. G. DESSLER und R. H. SABERSKY; F) Wärmeübergang in Gasen, E. R. VAN DRIEST; G) Kühlung durch Flüssigkeitsfilm, S. W. YUAN; H) Physikalische Grundlagen der Wärmestrahlung, S. S. PENNER; I) Praktische Berechnung von Strahlungs-Wärmeaustauschern, H. C. HOTTEL.

Die Abschnitte A bis C über Turbulenz bilden fast genau die Hälfte des Buches; es wird darin über die meist „klassischen“ Strömungsgrundlagen referiert, die für die darauf folgenden Wärmeprobleme wichtig sind. Von diesen seien einige Beispiele Stichwortartig

herausgegriffen: Wärmeübergang von flüssigen Metallen (sehr kleine PRANDTL-Zahl); die Bildung von Dampfblasen beim Kochen aus winzigen Gaskernen; der Einfluß von Oberflächenrauigkeit und Kühlung auf den Umschlagpunkt an einem Kegel bei Überschallströmung; das Wiederlaminarwerden der Grenzschicht an einer V 2 infolge der Stabilisierung durch den Wärmestrom von der heißen Grenzschicht in die kalte Wand.

Das Buch ist von Fachleuten für Fachleute geschrieben und somit nicht als Lehrbuch gedacht. Da jedoch jeder einzelne Abschnitt einen guten Überblick über ein Spezialgebiet gibt, sind meistens auch die Ausgangsgleichungen, wichtigsten Hypothesen und Ergebnisse angeführt, und der Leser kann sich nun an Hand der ausführlichen Schrifttumsangaben (50 bis 100 je Abschnitt) beliebig weit in die Einzelheiten vertiefen. Aus diesen und den oben genannten Gründen ist das Erscheinen dieses Buchs sehr zu begrüßen.

Hamburg

K. WIEGHARDT

Künstliche Erdsatelliten. Deutsche Redaktion H. Reichardt u. E. A. Niekisch. 357 S. m. 146 Abb. u. 31 Tab. Berlin 1959. Akademie-Verlag. Preis brosch. 38,— DM.

Der vorliegende 2. Sonderband der „Fortschritte der Physik“ enthält die deutsche Übersetzung von einigen 1957/58 in Uspechi fiz. Nauk erschienenen Beiträgen sowjetischer Autoren; die Probleme im Zusammenhang mit künstlichen Erdsatelliten behandeln.

In verschiedenen Artikeln, die etwa ein Drittel des Bandes ausmachen, werden Fragen der Bahnberechnung unter Berücksichtigung des Einflusses geophysikalischer Faktoren und der Lebensdauerbestimmung von Erdsatelliten diskutiert. Die von V. A. EGOROV stammende, ausführliche Arbeit über einige Probleme der Dynamik des Fluges zum Mond verdient besondere Erwähnung. Der überwiegende Teil der restlichen Beiträge befaßt sich mit der Bestimmung von Dichte, Druck und chemischer Zusammensetzung der Erdatmosphäre, mit der Messung elektrostatischer Felder und des geomagnetischen Feldes in den oberen Schichten der Atmosphäre, mit der Untersuchung ultravioletter und korpuskularer Strahlung der Sonne, sowie mit der Zusammensetzung der kosmischen Strahlung und der interplanetaren Materie. Diese Arbeiten fassen die vor allem aus amerikanischen Raketenanstiegen bis 1957 gewonnen Erkenntnisse zusammen und diskutieren die Möglichkeiten der Beobachtung der Satelliten.

Mit Ausnahme des Artikels „Optische Beobachtungen künstlicher Erdsatelliten“ werden in allen Beiträgen, die durchweg leicht lesbar geschrieben sind, lediglich die verschiedenen physikalischen Anwendungsmöglichkeiten künstlicher Satelliten erörtert. Es wäre schön, wenn ein weiterer Sonderband der Fortschritte der Physik den Beobachtungsergebnissen gewidmet werden könnte, die bisher mit Hilfe der künstlichen Satelliten gewonnen wurden.

Kiel

E. RICHTER

H. Cramér, Aus der neueren mathematischen Wahrscheinlichkeitslehre. (Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft 76a). 28 S. Köln/Opladen 1959. Westdeutscher Verlag. Preis brosch. DM 2,60.

Diese kleine Schrift des bekannten Mathematikers und Autors hat den großen Vorzug, auf dem knappen Raum von 27 Seiten einen allgemein verständlichen Ausblick auf die Theorie der stochastischen Prozesse zu geben. Berücksichtigt man, daß eine lehrbuch-

mäßige Darstellung dieses für Theorie und Praxis gleich wichtigen Gebietes, auch wenn sie die zahlreichen Anwendungen auf physikalischem, meteorologischem und ökonomischem Gebiet nicht einbezieht, heutzutage mindestens 600 Seiten umfassen muß, so wird man das Wenige, was hier über den WIENER- und den POISSON-Prozeß, einige Verallgemeinerungen, und schließlich stationäre Prozesse in mathematisch einwandfreier Form gesagt wird, umso mehr zu würdigen wissen.

Leider ist die Schrift typographisch nicht auf gleicher Höhe: die verschiedenen Druckfehler liefern für sich ein sehr anschauliches Beispiel für einen POISSONschen Prozeß.

Wien

W. EBERL

F. W. Simonia, Stufenlos verstellbare mechanische Getriebe. Zweite erweiterte Aufl. VIII + 190 S. m. 252 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959. Springer-Verlag. Preis geb. DM 29,40.

Der Verfasser hat das 1949 unter dem Titel „Stufenlos verstellbare Getriebe“ erschienene Werkstattbuch, Heft 96, völlig neu bearbeitet und erweitert und zugunsten der mechanischen Bauarten auf hydraulische und elektrische Regelgetriebe verzichtet. Nach einer Einleitung über die Möglichkeiten der stufenlosen Drehzahlregelung werden Reibradgetriebe mit Kegelscheiben und Zylindern, mit umlaufendem Reibring und mit Kugeln als Übertragungsmittel behandelt. Einen breiten Raum nehmen die Umhüllungsgetriebe mit Riemen- oder Kettenübertragung ein und auch den Schaltwerksgetrieben ist eine ausführliche Darstellung gewidmet. Den Abschluß des Buches bilden die Steigerungsmöglichkeiten und die Einrichtungen zur selbsttätigen Steuerung stufenloser Getriebe.

Dem Verfasser ist es gelungen, das weitreichende Gebiet der stufenlos verstellbaren mechanischen Getriebe und ihre zahlreichen Bauformen, auch die neueren Entwicklungen des Auslandes, in einem selbständigen Buch zusammenzufassen und ein ausgezeichnetes Bildmaterial hinzuzufügen. Dabei begnügt er sich nicht mit der Beschreibung vieler Typen, sondern gibt Leistungs- und Drehmoment-Kennlinien sowie Wirkungsgradkurven an, die für den Konstrukteur von Interesse sind, wenn er stufenlose Getriebe als Antrieb für seine Maschine vorsieht. Das Buch ist für die Praxis besonders wertvoll und seine Ausstattung vorzüglich.

Dresden

W. LICHTENHELT

Elektronische Datenverarbeitung. Folge 2, 3, 4. (Fachberichte über programmgesteuerte Maschinen und ihre Anwendung.) Braunschweig 1959. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn. Preis kart. je Folge DM 7,80.

Die 1959 erschienenen Folgen der „Elektronischen Datenverarbeitung“ enthalten eine Anzahl interessanter Maschinenbeschreibungen und Anwendungen. Hierbei stehen mehr die Anwendungen auf wirtschaftlichem als auf technischem Gebiet im Vordergrund.

Folgen 2 und 3 enthalten einen interessanten Überblick über die Ausstellung elektronischer Rechenanlagen im Dezember 1958 in London, wobei auch Analogrechner berücksichtigt werden. Unter den Maschinenbeschreibungen ist besonders die sehr ausführliche Beschreibung eines an der Technischen Universität in Berlin aufgebauten Kleinrechners mit Bandsteuerung zu erwähnen. Weiterhin werden der Siemensrechner 2002, der Rechner Bull Gamma 60 und die National Elliot 405 vorgestellt.

In Folge 4 wird eine für den Siemensrechner 2002 im Hahn-Meitner-Institut entwickelte Programmorganisation zur automatischen Zusammenstellung von Pro-



grammen aus Unterprogrammen und Programmierung mit symbolischen Adressen beschrieben. Weiterhin enthält dieses Heft eine Beschreibung der Univac-Factronic.

Eine Anzahl von Aufsätzen befassen sich mit Transportproblemen, andere mit Methoden der Datenverarbeitung im Betriebs- und Wirtschaftsablauf. Berichte über verschiedene Fachtagungen (Internationaler Kongreß über Informationsverarbeitung in Paris, Tagung über automatische Dokumentation in Frankfurt, Verfahrensforschung in Salzburg, Programmierung in Darmstadt) und über die Hannoverse Messe 1959 ergänzen den Inhalt der Hefte.

Berlin

K.-H. BACHMANN

**W. Meyer zur Capellen**, Bewegungsverhältnisse an der geschränkten Schubkurbel. (Forschungsberichte des Wirtschafts- und Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen, Nr. 449.) 58 S. Köln und Opladen 1958. Westdeutscher Verlag. Preis kart. DM 35,95.

In vorliegender Arbeit wird eine systematische Untersuchung des geschränkten (exzentrischen) Schubkurbeltriebes durchgeführt und eine Zusammenstellung der auftretenden Formeln über Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Abtriebsgliedes und darüber hinaus eines beliebigen Punktes der Koppelenebene gegeben, wobei auf alle möglichen Sonderfälle in breiter Darstellung eingegangen wird. Eine Reihe von Formeln wäre allerdings unter Zugrundelegung der GAUSSschen Zahlenebene einfacher abzu-leiten gewesen.

Einen größeren Raum wird der harmonischen Analyse von Bewegung, Geschwindigkeit und Beschleunigung, sowie der Drehbewegung der Koppelenebene eingeräumt. Da abgesehen von einigen Sonderfällen die rechnerische Auswertung der entsprechenden Formeln zu kompliziert werden würde, zeigt der Autor einen instrumentalen Weg unter Verwendung des harmonischen Analysators von MADER-OTT. Die Ergebnisse dieser instrumentalen Auswertung wurden in Kurventafeln niedergelegt.

Der Anhang, der mehr als 47 Figuren bringt, erleichtert noch das Lesen des außerordentlich klar geschriebenen Textes.

Zu bemerken wäre noch, daß die vorliegende Abhandlung ein Teilbericht einer größeren Arbeit über „Grundsätzliche Ermittlung der Bewegungen, Belastungen und Schwingungsverhältnisse an Vier- und Mehrgliedketten“ darstellt.

Dresden

R. BEREIS

**W. Meyer zur Capellen**, Harmonische Analyse bei Kurbeltrieben. (Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 676) 38 S. Köln und Opladen 1959. Westdeutscher Verlag. Preis kart. DM 11,50.

In vorliegender Abhandlung werden Gelenkvierecke, d. h. Kurbelschwinge und Doppelkurbel, und einige Sonderfälle untersucht, wobei besonderes Gewicht auf die harmonische Analyse des Abtriebswinkels, des Koppelwinkels und der Bewegungskomponenten der Koppelkurven gelegt wurde. Damit reiht sich diese Arbeit in eine größere Arbeit über „Grundsätzliche Ermittlung der Bewegungen, Belastungen und Schwingungsverhältnisse an Vier- und Mehrgelenk-ketten“ ein. Es wird auch öfter auf Ergebnisse vorangehender Arbeiten dieser Serie hingewiesen.

Die Analyse der Viergelenk-ketten wird durch relativ einfache Überlagerungen dargestellt. Für die Koeffizienten der Überlagerung lassen sich jedoch im allgemeinen keine geschlossenen Ausdrücke angeben. Es wird auf eine instrumentelle Analyse mit Sondergeräten hingewiesen.

Dresden

R. BEREIS

**H. Tietze**, Gelöste und ungelöste mathematische Probleme aus alter und neuer Zeit. Vierzehn Vorlesungen für Laien und Freunde der Mathematik. I. Bd.: XX + 256 S. m. 115 Abb. u. 10 Tafeln. II. Bd.: VIII + 297 S. m. 41 Abb. u. 8 Tafeln. München 1959. Verlag C. H. Beck. Preis geb. zusammen DM 36,—.

Wegen des großen Zuspruchs der populären „Vorlesungen für Hörer aller Fakultäten“ ist nun eine zweite Auflage erschienen. Das seinerzeit überaus beifällige Urteil vieler Rezensionen kann auch jetzt wieder bestätigt werden. Die Lektüre dieses Buches, das aus leicht faßlich vorgetragenen mathematischen Problemen, aus vielen geschichtlichen Mitteilungen über Mathematikerpersönlichkeiten und eigenen, manchmal etwas berufsstolzen kulturgeschichtlichen Betrachtungen des Verfassers besteht, obendrein mit schönen Figuren versehen ist, stellt genau das Richtige dar, um einen großen Personenkreis für mathematische Überlegungen aufzuschließen. Vor allem in die Hände unserer Jugend gehört dieses Buch! Kein Mathematiklehrer sollte nunmehr vor der Frage, wie er die nächste Vertretungsstunde in den oberen Klassen lehrreich und doch unterhaltsam verbringen könnte, in Verlegenheit geraten: die zwei Bände enthalten dafür Stoff genug — und zwar gleich in der methodisch günstigsten Form. Ein wertvolles Geburtstagsgeschenk für den heranwachsenden Sohn, ein Mittel der erbaulichen Unterhaltung für den eigenen Bedarf — das sind die „gelösten und ungelösten Probleme“.

Dresden

L. BITTNER

**M. Engeli — Th. Ginsburg — H. Rutishauser — E. Stiefel**, Refined Iterative Methods for Computation of the Solution and the Eigenvalues of Self-Adjoint Boundary Value Problems. (Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik der ETH Zürich, Nr. 8.) 107 S. Basel/Stuttgart 1959. Birkhäuser Verlag. Preis brosch. DM 17,—.

Diese Neuerscheinung ist ein äußerst interessanter Bericht über die Arbeiten der Verfasser auf dem Gebiet der Relaxationsmethoden. Der Leser wird hier mit modernen numerischen Verfahren zur genäherten Lösung von Rand- und Eigenwertproblemen bei selbstadjungierten partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typ bekanntgemacht. Ausgangspunkt der numerischen Betrachtungen ist das zum Differentialgleichungsproblem gehörige approximativ behandelte Variationsproblem. Abgesehen von Vorteilen in der Vorbereitung zur numerischen Durchführung — z. B. brauchen nur die wesentlichen, nicht aber die oftmals recht komplizierten und höhere Ableitungen enthaltenden natürlichen Randbedingungen berücksichtigt zu werden usw. — haben jahrelange Erfahrungen die Verfasser bewogen, diesen Weg zu beschreiten.

Diese Vorgehensweise führt beim jeweiligen Problem auf ein lineares Gleichungssystem, das iterativ gelöst wird. Je nach der Art und Weise, wie die neue Iterierte aus ihren Vorläufern berechnet wird, unterscheiden sich die verschiedenen Methoden. Insbesondere werden die sogenannten Gradientenmethoden, Überrelaxationsmethoden und abgeleitete Verfahren theoretisch hinsichtlich Konvergenz und anderer Eigenschaften untersucht.

Zahlreiche numerische Beispiele — behandelt werden hauptsächlich Probleme bei partiellen Differentialgleichungen 4. Ordnung, die in der Elastizitätstheorie auftreten — werden ausführlich diskutiert. Sie gestatten, die betrachteten Methoden hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit und Wirksamkeit zu prüfen und zu vergleichen.

Dresden

H. KADNER



**F. Schultz-Grunow**, Theoretische und experimentelle Beiträge zur Grenzschichtströmung. (Forschungsberichte des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 684) 66 S. Köln/Opladen 1959. Westdeutscher Verlag. Preis brosch. DM 19,—.

Der Bericht enthält vier verschiedene Beiträge. Im 1. Beitrag beschreiben d. Verf. ein Verfahren zur Sichtbarmachung von Strömungen mit Hilfe einer Hammerschlagsuspension in Essigester. Als Beispiel werden einige Aufnahmen von der Strömung zwischen zwei coaxialen Zylindern für verschiedene Rotationsgeschwindigkeiten wiedergegeben. Diese Aufnahmen vermitteln ein anschauliches Bild von den verschiedenen Strömungszuständen, angefangen von der einsetzenden TAYLORINSTABILITÄT bis zur voll ausgebildeten Turbulenz. Der 2. Beitrag enthält den theoretischen und experimentellen Nachweis für die Entstehung von Längswirbeln an einem zur Anströmungsrichtung symmetrischen Rauigkeitselement. Im 3. Beitrag wird gezeigt, daß die Strömung zwischen zwei coaxialen Zylindern gegenüber Störungen vom TOLLIEN-SCHLICHTINGSchen Typ stabil ist, wenn nur der äußere Zylinder rotiert, und wenn die Phasengeschwindigkeit  $c$  der Störungen nicht größer als die Rotationsgeschwindigkeit  $V$  des Zylinders ist. Die Experimente ergeben Stabilität bis zu den höchsten erreichbaren Drehzahlen. Die Frage, weshalb im Experiment keine Störungen mit  $c > V$  auftreten, bleibt offen. Der 4. Beitrag behandelt die Entmischung makromolekularer Lösungen in Scherströmungen. Es wird gezeigt, daß in einer reibungslosen Scherströmung auf ein zylindrisches Teilchen in der Nähe einer Wand Abstoßungskräfte wirken. Das infolge dieses Effekts sich einstellende Konzentrationsgefälle wird optisch nachgewiesen.

Freiburg/Br.

K. KIRCHGÄSSNER

**E. Kreybig**, Differential Geometry. (Mathematical Expositions, No. 11.) XIV + 352 S. m. 104 Abb. Toronto 1959. University of Toronto Press. Preis geb. \$ 8.50.

Dieses Buch ist eine vom Verfasser selbst besorgte freie Übersetzung seiner bei der Akademischen Verlagsgesellschaft Geest & Portig in Leipzig 1957 erschienenen „Differentialgeometrie“, in der nur geringfügige Veränderungen vorgenommen worden sind. Es wird daher auf die kürzlich erschienene Besprechung des deutschsprachigen Werkes hingewiesen (ZAMM 40 (1960), S. 143—144).

Dresden

HEINRICH

**L. Heffter**, Begründung der Funktionentheorie auf alten und neuen Wegen. Zweite, wesentlich verbesserte Aufl. VIII + 64 S. m. 13 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis brosch. 19,80 DM.

Die Tatsache, daß man bei Funktionen eines komplexen Argumentes aus der einmaligen stetigen Differenzierbarkeit auf die unbeschränkte Differenzierbarkeit und sogar auf die Entwickelbarkeit in eine Potenzreihe schließen kann, ganz im Gegensatz zum Reellen, macht eine Überprüfung der zum Aufbau der Funktionentheorie nötigen Voraussetzungen besonders anziehend. Insofern entspricht die vorliegende Schrift, die letzte Frucht jahrzehntelanger Bemühungen des Verfassers, sicher einem Bedürfnis. Die wichtigsten Reduktionen der ursprünglichen CAUCHYSchen Voraussetzung einmaliger stetiger Differenzierbarkeit, nämlich der Satz von GOURSAT und der Satz von LOOMAN-MENCHOFF, werden im Wortlaut genannt, und der erste dieser Sätze wird bewiesen. Bei den sonstigen Ausführungen wird der Leser viele Akzente anders setzen als der Verfasser und manche Bemerkung, die über mathematische Dinge gemacht wird, in den Bereich der Didaktik verweisen.

Jena

W. BRÖDEL

**A. Pflüger**, Elementare Schalenstatik. 3. Aufl. VIII + 112 S. m. 56 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. 19,50 DM.

Daß bereits innerhalb von drei Jahren eine Neuauflage der Elementaren Schalenstatik notwendig ist, zeigt die große Beliebtheit des PFLÜGERschen Schalenbuches.

Gegenüber der zweiten Auflage sind daher nur einige kleine Ergänzungen aufgenommen worden. So bleibt der Charakter des Buches als eine einfache und leicht verständliche Darstellung der Grundtatsachen der Schalentheorie voll gewahrt.

Freiburg/Sa.

-D. RÜDIGER

**R. Coester**, Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Querstromgebläsen. (Mitteilungen aus dem Institut für Aerodynamik an der ETH Zürich, Nr. 28.) 57 S. m. 76 Abb. Zürich 1959. Verlag Leemann. Preis brosch. SFr. 14,—.

Die Vorgänge im Laufrad von Querstromgebläsen sind verwickelt, obwohl die Strömung dort im wesentlichen eben ist. Frühere Entwicklungen brachten Durchflussszahlen bis 2, Druckzahlen bis 3,5 bei vertretbaren Wirkungsgraden. COESTER strebte extrem kleine Durchflussszahlen an. Er geht von Strömungsmessungen an bekannten Bauformen aus. Auf ihren Ergebnissen baut er die Behandlung der Potentialgleichung für das „gesunde“ Gebiet im Laufrad auf, beachtet am Gitterinnenrand Randbedingungen und fordert für die „Totwasser“-Grenze konstanten statischen Druck. Folgerungen für Schaufelgitter und Gehäuse erbrachten im Modellversuch sehr kleine Lieferzahlen (0,1 bis 0,3) bei gegenüber früheren Formen leicht erhöhter Druckzahl und gleichen Wirkungsgraden. Solche Querstromgebläse arbeiten in Gebieten, die bisher Kolben- und Rotationsverdichtern vorbehalten waren, mit vergleichbaren Wirkungsgraden. Für größere Lieferzahlen sind höhere Wirkungsgrade zu erwarten. Der Kompressibilitätseinfluß ist in gewissen Bereichen der Kennlinie gering, er zeigt sich im wesentlichen im Diffusor. Bei größerer Lieferzahl bricht die auffallend flache Kennlinie plötzlich ab, wird instabil. Die Arbeit behandelt dieses bisher wenig beachtete Gebiet der Strömungsmaschinen außerordentlich gründlich und regt Erweiterungen der Fragestellung an, für welche sie zahlreiche Hinweise gibt.

Frankenthal/Pfalz

W. RICHTER

**E. Muschelknauf**, Theoretische und experimentelle Untersuchungen über die Druckverluste pneumatischer Förderleitungen unter besonderer Berücksichtigung des Einflusses von Gutreibung und Gutgewicht. (VDI-Forschungsheft 476.) 32 S. m. 31 Abb. u. 4 Tafeln. Düsseldorf 1959. VDI-Verlag. Preis brosch. DM 27,75.

Die pneumatische Förderung von körnigem Gut in Rohren wird in der Technik schon lange angewendet. Die zunächst auf Empirie gegründeten Auslegungen solcher Einrichtungen wurden durch die 1924 veröffentlichte Dissertation von GASTERSTÄDT in Zusammenhang mit den Rechenverfahren der Mechanik und Strömungslehre gebracht. GASTERSTÄDT sowie die große Zahl nachfolgender Bearbeiter haben sich bemüht, ähnlich wie beim Durchfließen der Rohre mit homogenen Flüssigkeiten, einen dimensionslosen Verlustbeiwert für den Druckabfall zu bestimmen, der abhängig von dimensionslosen Ähnlichkeitskennzahlen ist.

Während bei der Rohrströmung von homogenen Flüssigkeiten der stationäre Gleichgewichtszustand sich nur zwischen der Druckkraft in Fließrichtung und der Wandreibung ausbildet, sind am pneumati-



schen Transport noch weitere Kräfte beteiligt. Man war bestrebt, den Einfluß der maßgebenden Kräfte zu analysieren und im Sinne einer notwendigen Vereinfachung Kräfte, deren Wirkung gering scheint, zu vernachlässigen. Jedoch ist es nicht einfach zu beurteilen, welche Kräfte vernachlässigbar sind.

Ein wesentlicher Fortschritt der vorliegenden Bearbeitung ist das Eingehen auf die Reibung zwischen dem Fördergut und der Rohrwand durch Messungen mit einer speziellen Versuchseinrichtung. Besondere Beachtung verdient die Tatsache, daß in einer Gutwolke mit Teilchen ungleicher Größe ein zusätzlicher Druckabfall gegenüber einem mit Schüttgut gleichgroßer Körnung beladenen Strom auftritt. Eine Theorie dieses Vorganges wird aufgestellt.

Das neue Rechenverfahren wird mit alten und neuen Experimenten verglichen, wobei die Messungen oft erhebliche Streubreite überdecken, die Rechnungen aber den Größenbereich richtig treffen.

Die vorliegende Arbeit, in der viele originelle Gedanken der Theorie hinzugefügt und neue Experimente gemacht wurden, stellt einen wesentlichen Fortschritt gegenüber dem Bekannten dar, ihr Studium ist den interessierten Ingenieuren zu empfehlen.

Dresden

W. ALERING

**Orbit Theory.** (Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, Vol. IX.) 195 S. m. 58 Abb. Providence 1959. American Mathematical Society. Preis geb. \$ 7.20.

Zwei Schwerpunkte der neueren Forschung auf dem Gebiet der Bahntheorien sind bei der Durchsicht dieses Bandes deutlich erkennbar: Bahnen geladener Teilchen in Magnetfeldern und Bahnen künstlicher Satelliten. Zum ersten Problemkreis gehören die Beiträge von E. D. COLEMAN über die Stabilität von Bahnen in Teilchenbeschleunigern und von S. OLBERT über die Bewegung von Ultrastrahlungsteilchen in galaktischen Magnetfeldern und über den FERMI'schen Beschleunigungsmechanismus. Der Bericht von W. H. BENNETT über die am U.S. Naval Research Lab., Washington D. C., durchgeführten Versuche zur experimentellen Reproduktion von STÖRMER-Bahnen enthält einige sehr instructive Abbildungen.

Folgende Beiträge beschäftigen sich mit den Problemen der Bahnen künstlicher Satelliten: P. HAZOET behandelt die dominierende Störung durch die Abplattung der Erde und die sich hieraus ergebende starke Präzession der Bahnebene. F. L. WHIPPLE gibt einen Bericht über die allgemeinen Probleme der Vorausberechnung der Satellitenpositionen, über die Technik ihrer Beobachtung und über die aus der Bahnbeobachtung zu erwartenden wissenschaftlichen Erkenntnisse. K. A. ECKERT beschäftigt sich mit dem eingeschränkten Dreikörperproblem der Astronautik in eichbaren Bahnen. Besondere Beachtung wird hierbei den Oszillationen um die Librationspunkte geschenkt. Der bei weitem umfangreichste Beitrag (70 Seiten) stammt von J. W. SNEY, der am Beispiel der Vanguard eingehend das Problem behandelt, einen Satelliten auf seine vorher bestimmte Bahn zu bringen.

Mit den klassischen Fragen der Himmelsmechanik beschäftigen sich W. J. ECKERT (numerische Rechnungen mit modernen Rechenautomaten) und D. BROUWER (Bemerkungen zur allgemeinen Theorie der Planetenbahnen). Schließlich behandelt C. GRAEF-FERNÁNDEZ Bahnen in einem Zentralfeld nach der BIRKHOFF'schen Theorie der Gravitation.

Dieser Band ist zweifellos geeignet, dem in der Einführung genannten Zweck des Symposiums zu dienen, nämlich Mathematiker und Physiker auf die in den letzten Dekaden erzielten beträchtlichen Fortschritte aufmerksam zu machen.

Kiel

G. TRAVING

**Proceedings of the Fourth Congress on Theoretical and Applied Mechanics, Howrah (Calcutta) 1958.** XI + 307 S. Kharagpur 1959. Indian Society of Theoretical and Applied Mechanics, Indian Institute of Technology.

Der Bericht über den vierten indischen Kongreß über theoretische und angewandte Mechanik enthält im ersten Teil Arbeiten aus der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie. U. a. wird über die Berechnung eines Teleskopspiegels als dicke Kreiskeibe, über die Torsion mehrzelliger Kastenquerschnitte, über die Abhängigkeit der elastischen Eigenschaften von Hölzern vom Wassergehalt und der Temperatur und über Wechseltorsionsversuche an Leichtmetallrohren berichtet, außerdem über das plastische Beulen langer Kreisrohre durch Außendruck und über die elastisch-plastische Beanspruchung einer Hohlkugel im Verfestigungsgebiet. Eine Arbeit ist der Ermittlung von Geschwindigkeit und Beschleunigung im Gelenkvier-eck gewidmet, eine der Untersuchung von Biegedauerbrüchen bei Kurbelwellen und eine der experimentellen Ermittlung der physikalischen Eigenschaften von Ziegelsteinen von der Porosität.

Der zweite Teil des Kongreßberichtes behandelt Fragen der Hydromechanik. Er enthält Arbeiten aus der Grenzschichttheorie (u. a. Anwendung des Differenzverfahrens auf stationäre Grenzschichten), aus der Turbulenzforschung, aus der Gasdynamik (Stoßwellen und Düsenströmung), ferner über die Strömung in Axialkompressoren, über thermische Probleme bei sehr schnellen Flugzeugen, über hydraulische Zyklone, über Sickerströmungen in Flußtalern und über den Wärmeübergang bei der Verbrennung eines Flüssigkeitstropfens.

Im dritten Teil wird über einige Sonderprobleme berichtet. Diese Arbeiten behandeln die Anwendung statistischer Verfahren in der Festigkeitslehre, das Vorhersageproblem bei Zeitreihen (time series) und die Anwendung der Sattelpunktmethode auf die Berechnung bestimmter Integrale, die in der Theorie der Höhenstrahlung auftreten.

Der Referent fand bei der Durchsicht des Berichtes viele Druckfehler. Außerdem ist die Wiedergabe der Abbildungen oft recht schlecht. Schließlich wird auf Seite 211 ein bestimmtes Integral graphisch ermittelt, das ohne weiteres genau gefunden werden kann. Außerdem ist die Kurve auf Seite 212 bei  $r/R_0 = 0$  falsch gezeichnet. Diese Beanstandungen vermindern den Wert des Berichtes jedoch nicht; er kann dem Arbeiter auf dem Gebiet der Mechanik manche Anregung und Information geben.

Dresden/Berlin

A. WEIGAND

**R. Beyer, Kinematisch-getriebedynamisches Praktikum.** Lehr- und Übungsbuch zur graphodynamischen Analyse ebener Getriebe. VIII + 170 S. m. 125 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. 29,40 DM.

Der Verfasser hat seinen beiden früher erschienenen Büchern „Kinematisch-getriebeanalytisches Praktikum“ und „Kinematische Getriebesynthese“ das neu erschienene Werk hinzugefügt, um zu zeigen, wie der Entwurf eines Getriebes hinsichtlich der auftretenden Kraft- und Massenwirkungen überprüft werden kann. Dazu sind die in den Gelenken auftretenden Gelenk- und Führungskräfte im Rahmen der WITTENBAUER'schen Grundaufgabe zu ermitteln, wenn die auf das Getriebe von außen wirkenden Kräfte, die Widerstandskräfte und die Verteilung der Massen gegeben sind. Die Größe der in das Getriebe einzuleitenden Antriebskraft, die bei vorgeschriebener Drehzahl des Antriebsgliedes einen bestimmten Beschleunigungszustand hervorruft, wird nach der sog. 2. WITTENBAUER'schen Grundaufgabe festgelegt. Das Buch be-



schränkt sich auf die Statik und Dynamik ebener Getriebe. Die Bedeutung der Kraft- und Massenreduktion wird dargelegt und die Aufstellung graphisch-dynamischer Kräftepläne besonders betont. Nur wenige Grundlagen der Vektorrechnung werden vorausgesetzt, so daß eine anschauliche, beinahe elementare Darstellung des für die Konstruktion von Getrieben bedeutsamen Stoffgebietes möglich ist.

Zahlreiche Übungsbeispiele werden zeichnerisch bzw. rechnerisch vollständig durchgeführt oder können selbständig erarbeitet und kontrolliert werden.

Das neue Buch stellt mit den früher erschienenen ein Sammelwerk dar, das an keinem Konstruktions-tisch bei der Bearbeitung getriebetechnischer Probleme fehlen sollte.

Dresden

W. LICHTENHELDT

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

## EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

**C. Jacob**, *Introduction Mathématique à la Mécanique des Fluides*. 1286 S. m. 258 Abb. Paris 1959. Gauthier-Villars. Preis geb. \$ 10,—.

**M. Z. v. Kryzwoblocki**, *Bergman's Linear Integral Operator Method in the Theory of Compressible Fluid Flow*. X + 188 S. m. 3 Abb. Wien 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 52,—.

*Information Processing. Proceedings of the International Conference on Information Processing, UNESCO, Paris 15—20 June 1959*. 520 S. München 1960. Oldenbourg Verlag GmbH. Preis geb. DM 84,—.

**W. Maak**, *Differential- und Integralrechnung*. 2. Aufl. 376 S. m. 14 Abb. Göttingen 1960. Vandenhoeck & Ruprecht. Preis geb. DM 26,—.

**E. Schmidt**, *Einführung in die Technische Thermodynamik und in die Grundlagen der chemischen Thermodynamik*. 8. Aufl. XX + 543 S. m. 244 Abb., 69 Tabellen u. 3 Tafeln. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 33,—.

**F. L. Alt**, *Advances in Computers*, Vol. 1. X + 316 S. New York/London 1960. Academic Press. Preis geb. \$ 10,—.

**G. Hoheisel**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. (Sammlung Götschen, Band 920) 6. Aufl. 128 S. Berlin 1960. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. DM 3,60.

**G. Hoheisel**, *Partielle Differentialgleichungen*. (Sammlung Götschen, Band 1003) 4. Aufl. 130 S. Berlin 1960. Walter de Gruyter & Co. Preis brosch. DM 3,60.

**W. Stampf**, *Der durchlaufende Bogenträger auf elastischen Stützen mit und ohne Versteifungsträger*. VIII + 196 S. m. 206 Abb. u. 2 Tafeln. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 37,50.

**O. Tietjens**, *Strömungslehre. Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt. Band I: Hydro- und Aerostatik. Bewegung der idealen Flüssigkeit*. XVI + 536 S. m. 496 Abb. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis geb. DM 66,—.

**G. Hellwig**, *Partielle Differentialgleichungen*. 246 S. m. 35 Abb. Stuttgart 1960. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. Preis geb. DM 29,80.

**F. M. Henderson**, *Elliptic Functions with Complex Arguments*. V + 38 S. m. 80 Bl. Tafeln. Ann Arbor 1960. The University of Michigan Press. Preis geb. \$ 8.00.

**E. Göllnitz/H. Najuch/S. Hösel**, *Differential- und Integralrechnung für die Fachschulen des Maschinenbaus*. 4. Aufl. X + 226 S. m. 143 Abb. Leipzig 1960. Fachbuchverlag. Preis geb. DM 10,80.

**H. Graudenz**, *Momenten-Einflußzahlen für Durchlaufträger mit beliebigen Stützweiten*. 3. Aufl. IV + 90 S. m. 14 Abb. u. 80 Zahlentafeln. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1960. Springer-Verlag. Preis brosch. DM 7,50.

**G. Meyer**, *Elektronische Rechenmaschinen und ihr Einsatz in der kaufmännischen Verwaltung von Industriebetrieben*. 154 S. m. 1 Faltafel. Würzburg 1960. Physica-Verlag.

**H.-U. Smolczyk**, *Ermittlung eingeschränkter plastischer Verformungen im Sand unter Flachfundamenten*. 110 S. m. 52 Abb. u. 4 Tabellen. Berlin 1960. Verlag Wilhelm Ernst & Sohn. Preis brosch. DM 16,80.

*Combinatorial Analysis. (Proceedings of the Symposia in Applied Mathematics, Vol. 10) VI + 311 S. Providence, Rhode Island, 1960. American Mathematical Society. Preis geb. \$ 7,70.*

## BERICHTIGUNG

Zu R. Reißig, *Ein Kriterium für asymptotische Stabilität*, ZAMM 40 (1960), S. 94—99

Nach einer Mitteilung des Verfassers soll auf S. 94 in Zeile 9 von unten

„positiv-semidefinite Funktion  $U(x, t)$ “

durch

„negativ-semidefinite Funktion —  $U(x, t)$ “

ersetzt werden.

H.

Herausgeber und Hauptschriftleiter: Prof. Dr.-Ing. habil. H. Heinrich, Dresden A 27, Friedrich-Hegel-Str. 31. Verlag: Akademie-Verlag GmbH, Berlin W 8, Leipziger Straße 3-4; Fernsprecher: 220441. Postscheckkonto: Berlin 35021. Bestellnummer dieses Heftes: 1009/40/10-11. Die Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich DM 15,—. Zuzüglich Bestellgeld. Doppelheft DM 10,—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, andernfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Veröffentlicht unter Lizenznummer ZLN 5011 des Ministeriums für Kultur, Hauptverwaltung Verlagswesen. Gesamtherstellung: VEB Druckerei „Thomas Müntzer“ Bad Langensalza (V/12/6) (1). Printed in Germany.

Diesem Heft liegt ein Prospekt des Springer-Verlages Berlin bei.



ALEXANDER GELEJI

# Bildsame Formung der Metalle in Rechnung und Versuch

1960. X, 754 Seiten — 764 Abbildungen — 70 Tabellen — gr. 8° — Lederin DM 88,—

Der Verfasser zeigt in diesem Werk, wie man die auftretenden Kräfte und den Werkstoff-Fluß bei der bildsamen Formung der Metalle durch Versuch und Rechnung erfassen kann. Die verschiedenen Verformungsverfahren: Stauchen, Schmieden, Pressen, Walzen, Stangen- und Drahtziehen, Strang- und Rohrpressen, Preßlochverfahren, Schmieden im Gesenk, Blechtiefziehen usw. werden vom Standpunkt der oben angegebenen Zielsetzung aus behandelt und die Ergebnisse mit zahlreichen neuen Versuchsergebnissen unterstützt. Die theoretische und die experimentelle Klärung der einzelnen Verformungsverfahren bzw. Formänderungsvorgänge werden überall mit praktischen Beispielen ergänzt, auch wird die richtige Anwendung der ausgearbeiteten Rechenverfahren gezeigt. Das Buch ist auf Grund der langjährigen praktischen, experimentellen und theoretischen Arbeiten des Verfassers entstanden und für den Ingenieur in Forschung und Praxis bestimmt.

*Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten*

A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N



WILHELM CAUER

# Theorie der linearen Wechselstromschaltungen

Aus dem Nachlaß herausgegeben von Ernst Glowatzki

Band II.

1960. XVI, 370 Seiten — 150 Abbildungen — 8 Tabellen — gr. 8° — Ganzleinen DM 44,—

Der Herausgeber legt mit dem II. Band der „Theorie der linearen Wechselstromschaltungen“ den Abschluß des Cauerschen Lebenswerkes vor. Cauers Bemühen, die Vorgänge der Schwachstromtechnik der exakten mathematischen Berechnungen zugänglich zu machen, hat den I. Band zu einem Standardwerk dieser Wissenschaft gemacht.

Auch in dem II. Band zeigt Cauer dem Ingenieur den Weg zur besten und allein richtigen Lösung von Aufgaben der Hochfrequenztechnik durch mathematische Berechnung. Im wesentlichen werden Verstärkerprobleme und daran angrenzende Fragen behandelt, wie etwa die Einschwingvorgänge bei Trägerfrequenz-Impulsverstärkern. Bis auf wenige Ausnahmen ist die Originalfassung gebracht. Der Inhalt des von Dr. Everling bearbeiteten Kapitels „Impulsverdichtung“ — die ihm zugrundeliegenden Cauerschen Unterlagen wurden von Prof. Guillemin (Mass. Inst. of Technology) als „far ahead of its time“ bezeichnet — hat in der letzten Zeit immer größere technische Bedeutung erlangt. Die Kapitel „Poisson-Integral“ und „Interpolationsprobleme“ enthalten wichtige mathematische Hilfsmittel sowie Beispiele für ihre Anwendung. Abschließend ist die unter Cauers Leitung entstandene Dissertation von Prof. Dr.-Ing. Naita Ming (Peking) über die Berücksichtigung der Verluste von Spulen und Kondensatoren in den II. Band aufgenommen.

Noch lieferbar: Band I

Aus dem Nachlaß ergänzt von Wilhelm Klein und Franz M. Pelz

Zweite, verbesserte Auflage

1954. XXIV, 769 Seiten — 461 Abbildungen — 1 Kunstdruckabbildung — gr. 8° —

Ganzleinen DM 48,—

*Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten*

A K A D E M I E - V E R L A G . B E R L I N